Alexander GROTHENDIECK

-:-:-:-

FONDEMENTS DE LA GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

[Extraits du Séminaire BOURBAKI 1957-1962]

-:-:-:-

Secrétariat mathématique
11 rue Pierre Curie, PARIS 5e

1 9 6 2

FONDEMENTS DE LA GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

[Extraits du Séminaire Bourbaki 1957-1962]

par Alexander GROTHENDIECK

TABLE DES MATIÈRES

-:-:-:-

FONDEMENTS DE LA GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE.
COMMENTAIRES

par Alexander GROTHENDIECK

Avertissement.

Nous avons donné dans le Séminaire Bourbaki, de 1957 à 1962, huit exposés touchant les Fondements de la géométrie algébriques. A l'exception du premier, ces exposés sont rédigés dans le cadre des schémas. Tous les résultats énoncés trouveront leur place dans les "Eléments de géométrie algébrique" de Jean DIEUDONNÉ et Alexander GROTHENDIECK. Cependant, la substance d'aucun de ces exposés n'est actuellement couverte ni par l'un des chapitres déjà publiés ou en préparation, ni par quelque autre livre ou article, et ne le sera sans doute pas durant quelques années encore. C'est là la principale raison qui nous a incité à réunir ces exposés qui mettront à la disposition des usagers un certain nombre de notions et de résultats-clefs de la théorie des schémas, en attendant une rédaction en forme. D'ailleurs, la lecture de ces textes permettra de se familiariser rapidement avec lesdits résultats et notions, sans être gêné par le détail, nécessairement encombrant, d'un traité systématique, et fournira les motivations indispensables pour l'étude d'un tel traité.

Pour la commodité du lecteur, nous avons rassemblé ici un certain nombre de commentaires et d'errata, groupés par exposés, qui signaleront notamment au passage les progrès accomplis depuis la rédaction du texte, et indiqueront certaines références supplémentaires.

Divers résultats figurant dans ces exposés ont été traités en détail dans le Séminaire de géométrie algébrique de l'IHES, ainsi que dans deux Séminaires consécutifs à Harvard, en 1961/62, faits le premier par moi-même et le second par MUMFORD-TATE, pour lesquels des notes miméographiées (rédigées par Mr LICHTENBAUM) sont actuellement en préparation.

Sigles employés.

SGA : Séminaire de géométrie algébrique, Institut des Hautes Études Scientifiques, 1960-1962.

SHG : Séminaire GROTHENDIECK, Harvard University, 1961/62.

SHMT : Séminaire MUMFORD-TATE, Harvard University, 1961/62.

EGA : GROTHENDIECK (A.) et DIEUDONNÉ (J.). - Eléments de géométrie algébrique. - Paris, Presses universitaires de France, 1960, 1961, ... (Institut des Hautes Etudes Scientifiques, Publications mathématiques, 4, 8, 11, ...).

TDTE : GROTHENDIECK (Alexander). - Technique de descente et théorèmes d'existence en géométrie algébrique, I-VI, Séminaire Bourbaki, t. 12, 1959/60, n° 190 et 195 ; t. 13, 1960/61, n° 212 et 221 ; t. 14, 1961/62, n° 232 et 236.

COMMENTAIRES et ERRATA.

1. Théorème de dualité pour les faisceaux algébriques cohérents.
[Séminaire Bourbaki, t. 9, 1956/57, n° 149, 25 p.]

Remarque sur la page 14. - Comme je l'ai signalé dans ma conférence au Congrès international des Mathématiciens en 1958 (1), les questions soulevées ici sont maintenant complètement résolues.

Le lecteur trouvera d'autres renseignements sur la dualité des faisceaux cohérents dans loco citato (1), p. 112-115, dans EGA III, 2e partie (en préparation), et, en attendant, dans SGA 1962. Un traitement plus systématique se trouvera dans un chapitre ultérieur de EGA (chapitre IX dans le plan prévu).

2. Géométrie formelle et géométrie algébrique.
[Séminaire Bourbaki, t. 11, 1958/59, n° 182, 28 p.]

Page 8, théorème 6. - L'hypothèse " f quasi-projectif" peut être remplacée par l'hypothèse plus faible " f séparé", en vertu du résultat suivant (Cf. SGA VIII, 6.2) : Tout morphisme $f : X \to Y$, qui est quasi-fini et séparé, est quasi-projectif.

(1) GROTHENDIECK (Alexander). - The cohomology theory of abstract algebraic varieties, Proceedings of the international Congress of Mathematicians [1958. Edinburgh] ; p. 103-118. - Cambridge, at the University Press, 1960.

Page 12, et page 14, remarque 1. - Signalons que J.-P. SERRE a construit une variété projective non singulière, de dimension 3, sur un corps algébriquement clos k, de caractéristique $p > 0$, qui ne provient pas par réduction d'un schéma propre sur un anneau local intègre de corps résiduel k, et ayant un corps de fractions de caractéristique nulle [2]. MUMFORD aurait trouvé un exemple analogue, avec une surface projective non singulière.

Page 15, remarques 2 et 3. - Je suis actuellement moins optimiste concernant les résultats conjecturés ici. Cependant, le problème relatif aux variations de structure pour l'espace projectif, signalé à la fin de la remarque 3, a été résolu par l'affirmative par HIRONAKA, et le problème analogue pour les variétés abéliennes a été résolu par KOIZUMI.

Page 16, ligne 3. - Signalons que MUMFORD a construit récemment les schémas des modules pour les courbes de genre g (Cf. SHMT). Le théorème 10 prouve d'ailleurs que les "schémas de Jacobi d'échelon n" de la théorie des Modules sont non singuliers (et même simples sur $\mathbb{Z}$).

Page 23, ligne 12, 1re ligne du corollaire 5. - Ajouter : " X ou Y étant propre sur k ".

La substance des § 1 à 5 est contenue dans la partie publiée de EGA III, celle des § 6 et 7 est contenue dans SGA III. Pour l'étude du groupe fondamental, voir SGA V, IX, X, XI, ainsi que SGA 1962 (exposés X, XII et XIII) pour les théorèmes du type Lefschetz et de nombreuses questions ouvertes. Seule la théorie des revêtements modérément ramifiés (Cf. théorème 14) n'a pas encore fait l'objet d'une rédaction en forme. Le corollaire du théorème 14, qui donne la détermination complète des revêtements galoisiens d'ordre premier à la caractéristique d'une courbe algébrique sur un corps algébriquement clos, a été utilisé de façon essentielle à trois reprises :

1° dans la démonstration par IGUSA de l'inégalité de Picard pour les surfaces projectives non singulières en caractéristique quelconque,

2° dans l'étude (développée indépendamment par OGG et ŠAFAREVIČ) du groupe des fibrés principaux homogènes sous une variété abélienne définie sur un corps de fonctions d'une variable, en caractéristique quelconque,

3° dans la démonstration récente, par ARTIN, de certains théorèmes-clefs sur la "cohomologie de Weil" des variétés algébriques.

---

(2) SERRE (Jean-Pierre). - Exemples de variétés projectives en caractéristique p non relevables en caractéristique zéro, Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A., t. 47, 1961, p. 108-109.

3. Technique de descente et théorèmes d'existence en géométrie algébrique [TDTE I].
I : Généralités. Descente par morphismes fidèlement plats.
[Séminaire Bourbaki, t. 12, 1959/60, n° 190, 29 p.]

Page 1, ligne 10. - Il semble maintenant excessif de dire que la technique de descente est "à la base de la plupart des théorèmes d'existence en géométrie algébrique". Cela est vrai dans une large mesure pour les techniques non projectives faisant l'objet des deux premiers exposés de la série TDTE I à VI, mais non pour les techniques projectives (TDTE IV, V, VI).

Page 5, ligne 16. - Il est inutile de supposer que α soit un morphisme de $\mathfrak{S}$-descente.

Page 20, remarque. - Un morphisme $S' \to S$ quasi-fini, étale, surjectif, ou un morphisme $\mathrm{Spec}(\hat{A}) \to \mathrm{Spec}(A)$ n'est pas toujours un morphisme de descente strict, même si A est un anneau local d'une courbe algébrique sur un corps algébriquement clos k, et $S = \mathrm{Spec}(A)$. Ainsi on peut trouver un morphisme propre et simple $f : X \to S$, faisant de X un fibré principal de base S sous une courbe elliptique E, tel que $f' : X' \to S'$ soit projectif, mais f n'étant pas projectif. C'est donc en même temps un exemple d'un fibré principal homogène non isotrivial sous un schéma abélien.

Page 26, ligne 9. - Lire "CHOW-LANG" au lieu de "IGUSA-LANG".

Pour divers détails touchant la théorie de la descente, voir SGA VI, VII, VIII.

4. TDTE II : Le théorème d'existence en théorie formelle des modules.
[Séminaire Bourbaki, t. 12, 1959/60, n° 195, 22 p.]

Page 8. - La formule écrite dans la proposition 5.1 n'est correcte que lorsque Λ est un corps ; dans le cas général, il faut remplacer $\mathfrak{m}_\xi/\mathfrak{m}_\xi^2$ par le quotient de cet espace par l'image de $\mathfrak{n}_\xi/\mathfrak{n}_\xi^2$, où $\mathfrak{n}$ est l'idéal maximal de Λ. De plus, la définition donnée pour $\mathcal{O}$ simple sur Λ n'est correcte que lorsque l'extension résiduelle k'/k est séparable. Dans le cas général, cf. SGA III, 1.1.

Page 14, remarque. - Les problèmes soulevés ici sont complètement résolus dans le cas projectif par les "schémas de Hilbert" (Cf. TDTE IV). Des exemples de NAGATA et HIRONAKA montrent par contre que les foncteurs envisagés ne sont pas nécessairement représentables si on ne fait pas d'hypothèse projective, même en se bornant à la classification des sous-variétés de dimension 0 d'une variété complète non singulière de dimension 3 ; ceci est lié au fait que le carré symétrique d'une telle variété peut ne pas exister.

Page 15, n° 3. - Pour une étude plus complète, voir TDTE V.

Page 16, proposition 3.1. - Au lieu de "si f est propre", lire "si f est propre et séparable".

Pages 18 et 19, remarques, 2°. - J'ai montré récemment que le schéma formel des modules pour une variété abélienne sur un corps est bien simple sur l'anneau de Witt, en d'autres termes que tout schéma abélien sur un anneau artinien local, quotient d'un autre, provient par réduction d'un schéma abélien sur ce dernier. La démonstration utilise simplement les propriétés de variance de la classe d'obstruction au relèvement, introduite dans l'exposé n° 182, page 12. Rappelons aussi que les schémas de modules pour les courbes de genre g ou les schémas abéliens polarisés ont été construits par MUMFORD (Cf. SHMT).

Page 19, § 5. - Il faut supposer que la section envisagée pour définir U soit non diviseur de 0 non seulement sur $\mathfrak{X}$, mais sur tout X_n.

Page 20, lignes 12 et 13. - Au lieu de " $\underset{\sim}{G}_x = G(\mathrm{Spec}(\hat{\underset{\sim}{O}}_{\mathfrak{X},x}))$ ", lire :

$$\underset{\sim}{G}_x = G(\mathrm{Spec}(\underset{\sim}{O}_{\mathfrak{X},x})) \subset G(\mathrm{Spec}(\hat{\underset{\sim}{O}}_{\mathfrak{X},x})) \qquad ,$$

et au lieu de " $\underset{\sim}{O}'_{ox}$ ", lire : " $\hat{\underset{\sim}{O}}'_{ox}$ ".

5. TDTE III : Préschémas quotients.
[Séminaire Bourbaki, t. 13, 1960/61, n° 212, 20 p.]

Page 15, assertion (i). - Le fait que $Y = X/\mathcal{R}$ soit quasi-projectif sur S ne semble prouvé, pour l'instant, que dans le cas où $\mathcal{R}$ provient d'une relation d'équivalence.

Pages 18 et 19. - Comme nous le signalons à la fin de l'exposé suivant, la conjecture envisagée est décidément fausse. Le "fait positif" signalé dans la remarque 8.1 semble avoir été démontré simultanément par divers auteurs (NAGATA, ROSENLICHT, GROTHENDIECK, ...).

Signalons que l'application faite dans TDTE V de la théorie développée ici du passage au quotient à la construction des schémas de Picard peut se remplacer également par une utilisation convenable des schémas de Hilbert (Cf. SHMT). Comme il a été dit dans le § 8, la lacune la plus importante de la théorie, présentée ici, est le manque d'un critère d'existence de quotients par une relation d'équivalence non propre, telles les relations d'équivalence provenant de certaines opérations du groupe projectif. Un théorème important dans cette voie a été obtenu par MUMFORD (3). Pour un raffinement de son résultat, et diverses applications à la théorie, voir SHMT.

6. TDTE IV : Les schémas de Hilbert.
[Séminaire Bourbaki, t. 13, 1960/61, n° 221, 28 p.]

Page 6, théorème 2.1, 3e ligne. - Au lieu de "il faut", lire "il faut et il suffit".

Page 15, ligne 13. - Au lieu de " $P \neq Q$ ", lire " $P < Q$ ".

- ligne 15. - Au lieu de "Si au contraire $P = Q$ ", lire "Dans le cas contraire, on aura $P(n) \geqslant Q(n)$ pour n grand".

- ligne 18, formule (*). - Au lieu de " $<$ " et " $>$ ", lire " $\leqslant$ " et " $\geqslant$ ".

- ligne 5 à partir du bas. - Au lieu de " z ", lire " Z ".

Page 18, remarque 3.9. - Signalons que l'étude des composantes connexes des schémas de Hilbert sur un corps algébriquement clos a été faite par HARTSHORNE. Cet auteur prouve que les $\underline{\mathrm{Hilb}}_r^P$ sont connexes, et détermine les couples (r , P) pour lesquels $\underline{\mathrm{Hilb}}_r^P = \emptyset$ (4).

Page 23, ligne 5 à partir du bas. - Au lieu de "une composante", lire "d'une composante".

Pages 23 et 24, remarque 5.5. - A propos de l'exemple de ZAPPA, signalons que MUMFORD vient même de construire une composante irréductible du schéma de Hilbert pour $\mathbb{P}^3_{\mathbf{C}}$ (dont les points généraux représentent des courbes non singulières de degré 14, genre 24), qui est non réduite en son point générique. Faisant éclater une des courbes obtenues, il obtient également un schéma projectif régulier de dimension 3 sur $\mathbf{C}$, dont le schéma formel des modules est non réduit en son point générique, ou, ce qui revient au même, tel que sa variété des modules locale, au sens de la géométrie analytique, sur $\mathbf{C}$ (Cf. Séminaire Cartan, t. 13, 1960/61), est non réduite en tous ses points.

---

(3) MUMFORD (David). - An elementary theorem in geometric invariant theory, Bull. Amer. math. Soc., t. 67, 1961, p. 483-486.

(4) HARTSHORNE (R.). - Connectedness of the Hilbert scheme (Thesis. Harvard. 1962).

7. TDTE V : Les schémas de Picard. Théorèmes d'existence.
[Séminaire Bourbaki, t. 14, 1961/62, n° 232, 19 p.]

Page 7, remarque 3.3. - La question soulevée ici a été résolue affirmativement par MUMFORD (voir commentaires à l'exposé suivant).

Page 13, remarque 5.2. - Comme je le signale au début de l'exposé suivant, la conjecture d'existence avancée ici est fausse, cependant MUMFORD arrive à prouver par ses méthodes un théorème légèrement plus faible.

Page 14, ligne 7. - Après "complet", ajouter "à corps résiduel algébriquement clos". Le contre-exemple de MUMFORD qu'on vient de signaler montre d'ailleurs que cette restriction est indispensable.

Page 17, remarque 6.6. - Comme nous le signalons au début de l'exposé suivant, la question soulevée ici vient d'être résolue par l'affirmative par MURRE.

Page 18, remarque 6.7. - La question soulevée ici se résoud par l'affirmative (Cf. dernier alinéa des commentaires à l'exposé suivant).

Page 18, remarque 6.8, 4e ligne. - Au lieu de "régulier", lire "simple sur k ".

8. TDTE VI : Les schémas de Picard. Propriétés générales.
[Séminaire Bourbaki, t. 14, 1961/62, n° 236, 23 p.]

Page 12, ligne 16. - Au lieu de "droite affine", lire "droite affine privée de l'origine".

- ligne 18. - Au lieu de " $X[t]$ ", lire " $X[t, t^{-1}]$ ".

Page 16, proposition 3.1, 6e ligne. - Au lieu de "Or l'hypothèse ...", lire "Or, de l'hypothèse ...".

Page 21, § 4 : Le théorème de finitude pour le schéma de Picard. - Les questions de finitude du genre de celles soulevées dans ce paragraphe ont été à peu près totalement résolues depuis la rédaction du présent exposé. Indiquons les faits principaux connus maintenant dans cette direction. Pour simplifier les énoncés, nous supposons implicitement que tous les préschémas de Picard, intervenant dans les énoncés, existent, bien qu'une modification évidente de ces énoncés permette de se débarrasser de toute hypothèse d'existence. S désigne par la suite un schéma noethérien, X , Y des schémas propres sur S .

(i) Soit $f : X \to Y$ un morphisme surjectif, alors $f^* : \underline{\mathrm{Pic}}_{Y/S} \to \underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ est un morphisme de type fini.

(ii) Supposons Y projectif sur S, muni d'un Module inversible ample relativement à S, et soient X le schéma des zéros d'une section quelconque de ce Module, $f : X \to Y$ l'immersion canonique. Supposons enfin que les composantes irréductibles des fibres de Y/S soient de dimension $\geqslant 3$. Alors $f^* : \underline{\mathrm{Pic}}_{Y/S} \to \underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ est de type fini.

(iii) Supposons que X soit projectif sur S, et que toutes ses fibres géométriques soient intègres et de dimension n. Soit $\mathcal{O}_X(1)$ un Module inversible ample sur X, permettant de définir des polynômes de Hilbert. Soit M une partie de $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$, alors M est quasi-compacte si et seulement si, dans les polynômes de Hilbert $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots$ des éléments de M, les coefficients a_1 et a_2 restent bornés.

(iv) Pour tout entier $n \neq 0$, l'homomorphisme de puissance n-ième dans le préschéma en groupes $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ est un morphisme de type fini.

Notons que (i) et (ii) signifient aussi que (sous les hypothèses envisagées dans ces énoncés (i) et (ii)) <u>une partie M de $\underline{\mathrm{Pic}}_{Y/S}$ est quasi-compacte si et seulement si son image dans $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ l'est</u>. On en conclut qu'un Module inversible $\mathcal{L}$ sur Y est τ-équivalent à zéro si et seulement si son image inverse sur X l'est ; en d'autres termes $\underline{\mathrm{Pic}}^{\tau}_{Y/S}$ est l'image inverse de $\underline{\mathrm{Pic}}^{\tau}_{X/S}$. En particulier, pour montrer que le premier préschéma est de type fini sur S, il suffit de le prouver pour le second puisque $\underline{\mathrm{Pic}}_{Y/S} \to \underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ est de type fini. Utilisant alors (i), le lemme de Chow et (iii), on trouve :

(v) $\underline{\mathrm{Pic}}^{\tau}_{X/S}$ est de type fini sur S.

De façon générale, la conjonction de (i) pour un morphisme fini et de (ii) permet de se ramener, pour la plupart des questions de finitude, au cas où X/S est à fibres géométriques intègres normales de dimension $\leqslant 2$; souvent même, appliquant (i) pour un morphisme surjectif non nécessairement fini, et la résolution des singularités des surfaces algébriques (due en caractéristique quelconque à ABHYANKAR), on se ramène au cas où X/S est même simple, donc à fibres géométriques non singulières de dimension 2. Cela permet par exemple, compte tenu de (v), et de l'inégalité de Picard-Igusa majorant le rang du groupe de Néron-Severi d'une surface projective non singulière, de prouver la généralisation suivante du théorème de finitude de Néron :

(vi) Soit X/S propre sur S et par ailleurs quelconque, alors les groupes de Néron-Severi $\underline{\mathrm{Pic}}_{X_i/k_i}/\underline{\mathrm{Pic}}^{o}_{X_i/k_i}$ des fibres géométriques X_i/k_i de X/S

sont de type fini, et leur rang et l'ordre de leur sous-groupe de torsion restent majorés.

La même méthode de réduction au cas des surfaces non singulières, et des théorèmes connus pour ce cas (savoir le théorème de finitude de Néron, et le fait que la forme intersection sur le groupe de Néron-Severi est non dégénérée) impliquent :

(vii) Soit X un schéma propre sur un corps algébriquement clos. Alors il existe un nombre fini de courbes fermées intègres C_i $(1 \leq i \leq r)$ dans X, ayant la propriété suivante : pour toute partie M de $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/k}$, M est quasi-compacte si et seulement si les entiers $\deg \mathcal{L}_{C'_i}$ $(\mathcal{L} \in M)$ restent bornés (où C'_i désigne la normalisée de C_i).

On peut prendre ici pour r le rang du groupe de Néron-Severi. Une fois connu que ce dernier est de type fini, (vii) se réduit au fait que les formes linéaires sur le groupe de Néron-Severi définies par des courbes C dans X ne s'annulent simultanément que sur les éléments de torsion du groupe de Néron-Severi. Dans le cas X projectif non singulier, ce résultat, ainsi que (v), était dû à MATSUSAKA. Utilisant (vii), on obtient facilement la caractérisation suivante des Modules inversibles τ-équivalents à 0 sur X :

(viii) Soient X/k un schéma propre sur un corps, $\mathcal{L}$ un Module inversible sur X. Conditions équivalentes :

a. $\mathcal{L}$ est τ-équivalent à 0,

b. Pour tout Module cohérent F, on a $\chi(F \otimes \mathcal{L}) = \chi(F)$, où χ désigne la caractéristique d'Euler-Poincaré,

b'. Comme (b), mais avec $F = \mathcal{O}_Y$, Y étant un sous-schéma fermé intègre de dimension 1 dans X,

c. Pour tout Y comme ci-dessus, désignant par Y' la courbe normalisée, on a $\deg \mathcal{L}_{Y'} = 0$.

Si X/k est projectif et muni d'un Module inversible ample $\mathcal{O}_X(1)$, les conditions précédentes sont aussi équivalentes aux suivantes :

d. Pour tout entier m, $\mathcal{L}^{\otimes m}(1)$ est ample.

e. (Si X est intègre.) Pour tout couple d'entiers m, n, on a

$$\chi(\mathcal{L}^{\otimes m}(n)) = \chi(\mathcal{O}(n))$$

(i. e. (b) est vrai en faisant $F = \mathcal{L}^{\otimes m}(n)$) .

Pour la suffisance de cette dernière condition, on notera qu'elle signifie que les polynômes de Hilbert des $\mathcal{L}^{\otimes m}$ sont tous égaux, donc, en vertu du critère de Mumford (iii), les $\mathcal{L}^{\otimes m}$ restent dans un ensemble quasi-compact de $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/k}$, i. e. on a (a). Les conditions (b), (b'), (c) doivent être considérées comme des variantes (sur un schéma propre quelconque) de la notion d'équivalence numérique, définie habituellement sur des variétés projectives non singulières. Pour ces dernières, l'équivalence de (a) et (c) était évidemment bien connue (MATSUSAKA).

Le critère (e) implique aussi le résultat suivant :

(ix) Soit $f : X \to S$ un morphisme projectif et plat dont les fibres géométriques sont intègres. Alors $\underline{\mathrm{Pic}}^{\tau}_{X/S}$ est ouvert et fermé dans $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$.

Nous nous bornerons à quelques commentaires sur la démonstration des résultats-clefs (i), (ii), (iii) (le résultat (iv) est un peu à part des autres, et se prouve en utilisant seulement (i) pour les morphismes finis surjectifs radiciels, de façon précise, pour un morphisme de Frobenius). Pour (i), on utilise de façon essentielle les idées de la descente non plate (voir notamment TDTE I, page 9). Il se trouve que (n'ayant en vue que des résultats de finitude), le manque de critères d'effectivité pour des données de descente est inoffensif. D'autre part, MUMFORD a démontré récemment une forme un peu moins forte de (iii), savoir le critère faisant intervenir tous les coefficients du polynôme de Hilbert. Son argument est extrêmement simple, et inspiré par la démonstration d'un critère d'amplitude de NAKAI (énoncé par ce dernier pour les surfaces non singulières, et généralisé par MUMFORD aux morphismes projectifs quelconques). Il me semble d'ailleurs que cet argument n'est valable que moyennant une légère restriction supplémentaire sur les fibres de X/S , (la propriété (S_2) de SERRE), vérifiée si les fibres géométriques sont normales. On utilise alors ce critère restreint dans la démonstration de (ii) : le critère (i) permet en effet de se ramener au cas où Y/S est plat à fibres géométriques intègres et normales, et appliquant le critère de Mumford, on se ramène aisément au cas où X/S satisfait aux mêmes conditions. De l'hypothèse de dimension résulte alors que les fibres géométriques de Y et de X sont de profondeur $\geqslant 2$ en leurs points fermés, ce qui permet d'appliquer les "critères d'équivalence" sous la forme qui leur est donnée dans SGA 1962 (exposé XII), et d'achever la démonstration de (ii). Une fois qu'on dispose de (i) et (ii), il n'est pas difficile dans le critère de Mumford de se débarrasser de toute hypothèse de normalité sur les fibres, et de le démontrer également sous la forme plus forte donnée dans (iii).

Notons enfin que la démonstration de (i) et (ii) montre également que dans le cas où S est le spectre d'un corps k, le morphisme $\underline{\mathrm{Pic}}_{Y/k} \to \underline{\mathrm{Pic}}_{X/k}$ est <u>affine</u> (et non seulement de type fini).

THÉORÈMES DE DUALITÉ POUR LES FAISCEAUX ALGÉBRIQUES COHÉRENTS.

par Alexandre GROTHENDIECK

Les résultats qui suivent, inspirés par le "théorème de dualité algébrique" de Serre, ont été trouvés en hiver 1955 et hiver 1956. Ils s'établissent très simplement à l'aide de résultats assez élémentaires sur la cohomologie des espaces projectifs [3], et l'utilisation intensive de l'algèbre homologique de Cartan-Eilenberg, sous la forme [2].

1. Les Ext de faisceaux de modules ([2], chap. 3 et 4).

Soit X un espace topologique muni d'un faisceau $\underline{O}$ d'anneaux avec unité (non nécessairement commutatifs). On considère la catégorie abélienne $\mathcal{C}^{\underline{O}}$ des faisceaux de $\underline{O}$-modules, appelés aussi $\underline{O}$-Modules. On sait que tout objet de cette catégorie admet une résolution injective, ce qui permet d'y définir les foncteurs Ext ayant les propriétés formelles bien connues. De façon précise, pour éviter des confusions, nous désignons par $\mathrm{Hom}_{\underline{O}}(X\,;\,A\,,\,B)$ ou simplement $\mathrm{Hom}(X\,;\,A\,,\,B)$ le groupe abélien des $\underline{O}$-homomorphismes de A dans B, tandis que $\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}}(A\,,\,B)$ désignera le faisceau des germes d'homomorphismes de A dans B $(A\,,\,B \in \mathcal{C}^{\underline{O}})$. On définit pour $A \in \mathcal{C}^{\underline{O}}$ fixé des foncteurs h_A et $\underline{h}_A$ à valeurs respectivement dans la catégorie $\mathcal{C}$ des groupes abéliens et la catégorie $\mathcal{C}^Z$ des faisceaux abéliens sur X, par les formules :

$$(1.1)\qquad h_A(B) = \mathrm{Hom}_{\underline{O}}(X\,;\,A\,,\,B) \qquad \underline{h}_A(B) = \underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}}(A\,,\,B)$$

Les foncteurs h_A et $\underline{h}_A$ sont des foncteurs covariants exacts à gauche, dont on considère les foncteurs dérivés droits, notés respectivement $\mathrm{Ext}^p_{\underline{O}}(X\,;\,A\,,\,B)$ et $\underline{\mathrm{Ext}}^p_{\underline{O}}(A\,,\,B)$. On a donc par définition

$$(1.2)\qquad \begin{cases} \mathrm{Ext}^p_{\underline{O}}(X\,;\,A\,,\,B) = (R^p\, h_A)(B) = H^p(\mathrm{Hom}_{\underline{O}}(X\,;\,A\,,\,C(B))) \\ \underline{\mathrm{Ext}}^p_{\underline{O}}(A\,,\,B) = (R^p\, \underline{h}_A)(B) = H^p(\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}}(A\,,\,C(B)) \end{cases}$$

où le symbole R^p désigne le passage aux foncteurs dérivés droits, et où $C(B)$ désigne une résolution injective arbitraire de B dans $\mathcal{C}^{\underline{O}}$. Désignons par $\Gamma : \mathcal{C}^Z \to \mathcal{C}$ le foncteur "sections". Rappelons que ses foncteurs dérivés droits sont notés par $B \to H^p(X\,,\,B)$:

(1.3) $$H^p(X, B) = (R^p \Gamma)(B) = H^p(\Gamma(C(B)))$$

On a évidemment $h_A = \Gamma \underline{h}_A$; d'autre part on vérifie que $\underline{h}_A$ transforme objets injectifs en objets acycliques pour Γ. On en conclut de façon bien connue :

PROPOSITION 1. - <u>Il existe pour tout</u> $\underline{O}$-<u>Module</u> A <u>un foncteur spectral cohomologique sur</u> $C^{\underline{O}}$, <u>aboutissant au foncteur gradué</u> $(\mathrm{Ext}^{*}_{\underline{O}}(X ; A, B))$, <u>et dont le terme initial est</u>

(1.4) $$E_2^{p,q}(A, B) = H^p(X, \underline{\mathrm{Ext}}^q_{\underline{O}}(A, B))$$

On en déduit des "<u>edge-homomorphisms</u>" et une suite exacte à cinq termes que nous n'écrirons pas.

COROLLAIRE 1. - <u>Si</u> A <u>est localement isomorphe à</u> $\underline{O}^n$, <u>alors on a des isomorphismes canoniques</u>

(1.5) $$\mathrm{Ext}^p_{\underline{O}}(X ; A, B) \xleftarrow{\sim} H^p(X, \underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}}(A, B))$$

(donnés par des edge-homomorphisms de la suite spectrale). <u>En particulier on a un isomorphisme canonique</u>

(1.6) $$\mathrm{Ext}^p_{\underline{O}}(X ; \underline{O}, B) = H^p(X, B)$$

Pour utiliser ces résultats, il faut savoir expliciter les $\underline{\mathrm{Ext}}^p_{\underline{O}}(A, B)$. Ce sont des foncteurs qui se calculent localement, i.e. si U est un ouvert de X, on a

$$\underline{\mathrm{Ext}}^p_{\underline{O}}(A, B)\,|U = \underline{\mathrm{Ext}}^p_{\underline{O}|U}(A\,|U, B\,|U)$$

comme il résulte du fait que la restriction à U d'un $\underline{O}$-Module injectif est un $(\underline{O}|U)$-Module injectif. De plus, on a des homomorphismes fonctoriels, pour $x \in X$ fixé

(1.7) $$\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}}(A, B)_x \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\underline{O}_x}(A_x, B_x)$$

qui se prolongent de façon unique en un homomorphisme de foncteurs cohomologiques en B :

(1.8) $$\underline{\mathrm{Ext}}^p_{\underline{O}}(A, B)_x \longrightarrow \mathrm{Ext}^p_{\underline{O}_x}(A_x, B_x)$$

PROPOSITION 2. - <u>Si</u> A <u>est, dans un voisinage de</u> x, <u>isomorphe au conoyau d'un homomorphisme</u> $\underline{O}^m \to \underline{O}^n$, <u>alors</u> (1.7) <u>est un isomorphisme pour tout</u> p. <u>Il en est ainsi en particulier si</u> A <u>est un</u> $\underline{O}$-<u>Module cohérent</u> [3].

PROPOSITION 3. - Soit $L_* = (L_i)$ une résolution gauche du $\underline{O}$-Module A par des $\underline{O}$-Modules dont chacun est isomorphe localement à un $\underline{O}^n$, Alors $\mathrm{Ext}_{\underline{O}}(A , B)$ s'identifie à $H^*(\mathrm{Hom}_{\underline{O}}(L_* , B))$, et $\mathrm{Ext}_{\underline{O}}(X ; A , B)$ s'identifie à l'hypercohomologie de X par rapport au complexe $\mathrm{Hom}_{\underline{O}}(L_* , B)$.

La démonstration est standard, on considère le bicomplexe $\mathrm{Hom}_{\underline{O}}(L_* , C(B))$ où $C(B$ est une résolution injective de B, et les homomorphismes naturels de $\mathrm{Hom}_{\underline{O}}(L_* , B)$ et de $\mathrm{Hom}_{\underline{O}}(A , C(B))$ dans ce dernier.

Pour finir, indiquons que les deux foncteurs Ext introduits dans (1.2) sont non seulement des foncteurs cohomologiques en B, mais des bifoncteurs cohomologiques, covariants en B et contrevariants en A.

2. Loi de composition dans les Ext.

Les résultats de ce numéro sont dus indépendamment à CARTIER et à YONEDA ; voir un exposé de CARTIER [1] pour des détails. Soit $\underline{C}$ une catégorie abélienne. Soient K et L deux objets gradués dans $\underline{C}$. On désigne par $\mathrm{Hom}(K , L)$ le groupe abélien gradué dont la composante de degré n est formé des homomorphismes homogènes de degré n de K dans L (i.e. des systèmes (u_i) d'homomorphismes $K^i \to L^{i+n}$). Si K et L sont des complexes (à opérateurs différentiels de degré $+1$ pour fixer les idées), on introduit dans $\mathrm{Hom}(K , L)$ l'opérateur différentiel donné par

$$\delta(u) = du + (-1)^{n+1} ud \ , \quad \text{où} \quad n = \deg(u) \tag{2.1}$$

qui en fait un complexe à opérateur différentiel de degré $+1$. Les cycles de degré n sont les opérateurs de degré n qui anticommutent à u (en tant qu'opérateurs homogènes). On peut alors considérer $H^*(\mathrm{Hom}(K , L))$, c'est un invariant des types d'homotopie de K et de L, qu'on pourra noter $H^*(K , L)$. Si on a un troisième complexe M, alors la composition des homomorphismes définit un accouplement $\mathrm{Hom}(K , L) \times \mathrm{Hom}(L , M) \to \mathrm{Hom}(K , M)$ compatible avec les opérateurs différentiels, d'où par passage à la cohomologie des accouplements

$$H^*(K , L) \times H^*(L , M) \to H^*(K , M) \tag{2.2}$$

notés $(u , v) \to vu$. Ces accouplements satisfont une propriété évidente d'associativité. En particulier, $H^*(K , K)$ est un anneau gradué associatif avec unité, et $H^*(K , L)$ (resp. $H^*(L , K)$) est un module gradué à droite (resp. à gauche) sur cet anneau, etc.. En dimension 0, (2.2) se réduit à la composition des homomorphismes permis de complexes. Enfin, une suite exacte de complexes

$0 \to K' \to K \to K'' \to 0$, telle que K'^{i} s'identifie à un facteur direct de K^{i} pour tout i , donne naissance à une suite exacte pour les complexes de groupes $\mathrm{Hom}(K'' , L)$, etc., d'où un opérateur cobord $H^{i}(K' , L) \to H^{i+1}(K'' , L)$. On définit de même les opérateurs cobord relatifs à une suite exacte en L . Les accouplements (2.2) sont compatibles, au sens usuel, avec ces opérateurs cobord.

Supposons maintenant que C soit une catégorie telle que tout élément A de C admette une résolution injective $C(A)$. On constate alors, utilisant une des nombreuses variantes du théorème du bicomplexe, que

$$H^{*}(C(A) , C(B)) = H^{*}(\mathrm{Hom}(C(A) , C(B)))$$

est canoniquement isomorphe à

$$H^{*}(\mathrm{Hom}(A , C(B))) = \mathrm{Ext}^{*}(A , B) .$$

Les opérateurs cobord envisagés plus haut donnent les homomorphismes cobord des Ext . De plus, les accouplements (2.2) donnent ici des accouplements associatifs, compatibles avec les homomorphismes cobord :

$$\mathrm{Ext}^{*}(A , B) \times \mathrm{Ext}^{*}(B , C) \to \mathrm{Ext}^{*}(A , C) \tag{2.3}$$

En particulier, $\mathrm{Ext}^{*}(A , A)$ est un anneau gradué associatif avec unité, etc. (On montre de façon analogue que les foncteurs Ext opèrent dans les foncteurs dérivés d'un foncteur quelconque ; nous ne nous servirons pas ici de ce fait).

Dans le cas où la catégorie envisagée est la catégorie $C^{\underline{O}}$ des $\underline{O}$-Modules sur X1, on obtient donc des accouplements

$$\mathrm{Ext}^{p}_{\underline{O}}(X ; A , B) \times \mathrm{Ext}^{q}_{\underline{O}}(X ; B , C) \to \mathrm{Ext}^{p+q}_{\underline{O}}(X ; A , C) \tag{2.4}$$

qui peuvent s'expliciter comme il a été dit. D'ailleurs, les mêmes développe
mais où on remplace la catégorie des groupes abéliens par la catégorie des
faisceaux abéliens sur X , et les foncteurs Hom par les foncteurs $\underline{\mathrm{Hom}}$
sent aussi des accouplements, ayant les mêmes propriétés formelles, et de "nature locale" cette fois-ci :

$$\underline{\mathrm{Ext}}^{p}_{\underline{O}}(A , B) \times \underline{\mathrm{Ext}}^{q}_{\underline{O}}(B , C) \to \underline{\mathrm{Ext}}^{p}_{\underline{O}} \tag{2.5}$$

Ces derniers se précisent si on remarque que les
compatibles avec les accouplements entre les Ext .

$0 \to K' \to K \to K'' \to 0$, telle que K'^i s'identifie à un facteur direct de K^i pour tout i , donne naissance à une suite exacte pour les complexes de groupes $\mathrm{Hom}(K'' , L)$, etc., d'où un opérateur cobord $H^i(K' , L) \to H^{i+1}(K'' , L)$. On définit de même les opérateurs cobord relatifs à une suite exacte en L . Les accouplements (2.2) sont compatibles, au sens usuel, avec ces opérateurs cobord.

Supposons maintenant que C soit une catégorie telle que tout élément A de C admette une résolution injective $C(A)$. On constate alors, utilisant une des nombreuses variantes du théorème du bicomplexe, que

$$H^*(C(A) , C(B)) = H^*(\mathrm{Hom}(C(A) , C(B)))$$

est canoniquement isomorphe à

$$H^*(\mathrm{Hom}(A , C(B))) = \mathrm{Ext}^*(A , B) .$$

Les opérateurs cobord envisagés plus haut donnent les homomorphismes cobord des Ext . De plus, les accouplements (2.2) donnent ici des accouplements associatifs, compatibles avec les homomorphismes cobord :

$$\mathrm{Ext}^*(A , B) \times \mathrm{Ext}^*(B , C) \to \mathrm{Ext}^*(A , C) \tag{2.3}$$

En particulier, $\mathrm{Ext}^*(A , A)$ est un anneau gradué associatif avec unité, etc. (On montre de façon analogue que les foncteurs Ext opèrent dans les foncteurs dérivés d'un foncteur quelconque ; nous ne nous servirons pas ici de ce fait).

Dans le cas où la catégorie envisagée est la catégorie $C^{\underline{O}}$ des $\underline{O}$-Modules sur X1, on obtient donc des accouplements

$$\mathrm{Ext}^p_{\underline{O}}(X ; A , B) \times \mathrm{Ext}^q_{\underline{O}}(X ; B , C) \to \mathrm{Ext}^{p+q}_{\underline{O}}(X ; A , C) \tag{2.4}$$

qui peuvent s'expliciter comme il a été dit. D'ailleurs, les mêmes développements, mais où on remplace la catégorie des groupes abéliens par la catégorie des faisceaux abéliens sur X , et les foncteurs Hom par les foncteurs $\underline{\mathrm{Hom}}$ définissent aussi des accouplements, ayant les mêmes propriétés formelles, et de "nature locale" cette fois-ci :

$$\underline{\mathrm{Ext}}^p_{\underline{O}}(A , B) \times \underline{\mathrm{Ext}}^q_{\underline{O}}(B , C) \to \underline{\mathrm{Ext}}^{p+q}_{\underline{O}}(A , C) \tag{2.5}$$

Ces derniers se précisent si on remarque que les homomorphismes (1.8) sont compatibles avec les accouplements entre les Ext .

Rappelons enfin qu'on a aussi une structure multiplicative entre foncteurs $H^p(X, A)$ (cup-produit). On constate alors que les suites spectrales de la proposition 1 sont compatibles avec les structures multiplicatives, de façon plus précise, on a un accouplement de la suite spectrale $E(A, B)$ et de la suite spectrale $E(B, C)$ vers la suite spectrale $E(A, C)$, qui, pour l'aboutissement se réduit à l'accouplement entre les Ext globaux, et pour le termme initial à l'accouplement déduit, dans le deuxième membre de (1.4), du cup-produit et des accouplements des Ext locaux. Il en résulte en particulier que les "edge-homomorphisms"

(2.6) $$\mathrm{Ext}^n_{\underline{O}}(X ; A, B) \to H^0(X ; \underline{\mathrm{Ext}}^n_{\underline{O}}(A, B))$$

(2.7) $$H^n(X, \underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}}(A, B)) \to \mathrm{Ext}^n_{\underline{O}}(X ; A, B)$$

sont compatibles avec les structures multiplicatives. Si on se borne donc aux faisceaux localement isomorphes à un $\underline{O}^m$, cela explicite complètement la composition entre Ext globaux à l'aide du cup-produit, compte tenu de l'isomorphisme (1.5).

3. Résultats de cohomologie locale.

Soit A un anneau commutatif avec unité muni d'un idéal J. Nous allons définir, pour un A-module M variable, des homomorphismes fonctoriels

(3.1) $$\begin{cases} \mathrm{Ext}^p_A(A/J, M) \to \mathrm{Hom}_A(\overset{p}{\wedge} J/J^2, M \otimes A/J) \\ \mathrm{Tor}^A_p(A/J, M) \leftarrow (\overset{p}{\wedge} J/J^2) \otimes \mathrm{Hom}_A(A/J, M) \end{cases}$$

où les produits tensoriels et extérieurs sont pris sur l'anneau A ; noter d'ailleurs que J/J^2 est en fait un A/J-module, et que ses puissances extérieures en tant que A-module ou en tant que A/J-module sont les mêmes. La définition des homomorphismes (3.1) revient à la définition, pour tout système $\underline{x} = (x_1, \dots, x_p)$ de points de J d'homomorphismes $\varphi_{\underline{x}}$:

(3.2) $$\begin{cases} \varphi_{\underline{x}} : \mathrm{Ext}^p_A(A/J, M) \to M \otimes A/J \\ \varphi_{\underline{x}} : \mathrm{Hom}_A(A/J, M) \to \mathrm{Tor}^A_p(A/J, M) \end{cases}$$

de telle façon que les conditions suivantes soient satisfaites :

i. $\varphi_{x_1,\dots,x_p}$ dépend de façon A-multilinéaire alternée du système des $x_i \in J$

ii. $\varphi_{x_1,\dots,x_p}$ est nul quand un des x_i est dans J^2.

En fait, ii. résulte de i., puisque $a\varphi_{\underline{x}} = 0$ pour $a \in J$, comme on voit en remarquant que tous les modules dans (3.2) sont annulés par J.

Pour définir $\varphi_{\underline{x}}$, considérons le complexe $K_{\underline{x}}$ dont le A-module sous-jacent est $\wedge A^p$, et dont l'opérateur différentiel est le produit intérieur $i_{\underline{x}}$ par $\underline{x}$ considéré comme forme linéaire sur A^p de composantes $x_1 , \dots , x_p$. L'opérateur différentiel est de degré -1, les degrés sont positifs, et la cohomologie de ce complexe en dimension 0 est $A/(x_1A + \dots + x_pA)$. Comme les x_i sont dans J, on en déduit une augmentation $K_{\underline{x},o} \to A/J$. Ainsi $K_{\underline{x}}$ apparaît comme un complexe libre augmenté, à module d'augmentation A/J. On en déduit, de façon connue, des homomorphismes

$$\mathrm{Ext}_A^*(H_o(K_{\underline{x}}) , M) \to H^*(\mathrm{Hom}_A(K_{\underline{x}} , M)) \quad \text{et} \quad \mathrm{Tor}_*^A(H_o(K_{\underline{x}}) , M) \leftarrow H_*(K_{\underline{x}} \otimes M)$$

d'où, en composant avec les homomorphismes sur les Ext et les Tor déduits de l'homomorphisme d'augmentation $H_o(K_{\underline{x}}) \to A/J$, des homomorphismes

$$(3.3) \quad \begin{cases} \psi_{\underline{x}} : \mathrm{Ext}_A^*(A/J , M) \to H^*(\mathrm{Hom}_A(K_{\underline{x}} , M)) \\ \psi_{\underline{x}} : \mathrm{Tor}_*^A(A/J , M) \leftarrow H_*(K_{\underline{x}} \otimes M) \end{cases}$$

Or on constate aussitôt qu'en dimension maxima p, la cohomologie des seconds membres est $M/(x_1 M + \dots + x_p M)$ (resp. est l'ensemble des éléments de M annulés par chacun des x_i). Comme les x_i sont dans J, on en déduit des homomorphismes

$$(3.4) \quad \begin{cases} H^p(\mathrm{Hom}_A(K_{\underline{x}} , M)) \to M \otimes A/J \\ H_p(K_{\underline{x}} \otimes M) \leftarrow \mathrm{Hom}_A(A/J , M) \end{cases}$$

Composant les homomorphismes (3.3) et (3.4), on obtient les homomorphismes (3.2) que nous voulions définir. La vérification de i. est fastidieuse, mais ne présente pas de difficultés.

PROPOSITION 4. - *Soit* A *un anneau commutatif avec unité, soit* $(x_1, \dots, x_p)$ *une suite d'éléments de* A *telle que pour* $1 \leq i \leq p$, *l'image de* x_i *dans le quotient de* A *par l'idéal engendré par* $(x_1, \dots, x_{i-1})$ *ne soit pas diviseur de* 0. *Soit* J *l'idéal engendré par les* x_i. *Alors* J/J^2 *est un* (A/J)*-module libre ayant pour base les images canoniques des* x_i, *le complexe* $K_{\underline{x}}$ *est une résolution libre de* A/J, *et pour tout* A*-module* M, *les homomorphismes* (3.1) *en dimension* p *sont bijectifs. Il en est de même des homomorphismes analogues définis pour des degrés* i *quelconques pourvu que* $J.M = 0$.

(Le point essentiel, dont tous les autres résultent, est l'acyclicité de $K_{\underline{x}}$, qui est un fait bien connu sous les conditions indiquées).

COROLLAIRE 1. - A *et* J *étant comme ci-dessus, supposons de plus que* A *soit une algèbre affine régulière de* dim n *sur un corps parfait* $\underline{k}$, *et que* A/J *soit une algèbre affine régulière. Désignons par* $\Omega^i(A)$, $\Omega^i(A/J)$ *les modules de différentielles de Kähler. Alors on a un isomorphisme canonique compatible avec la localisation,*

$$\mathrm{Ext}^p_A(\Omega^{n-p}(A/J)\ ,\ \Omega^n(A)) = A/J \tag{3.5}$$

En effet, $\Omega^{n-p}(A/J)$ est un (A/J)-module libre de rang 1, de même $\Omega^n(A)$ est un A-module libre de rang n, donc le premier membre est égal à

$$\mathrm{Ext}^p_A(A/J\ ,\ A) \otimes \Omega^{n-p}(A/J)' \otimes \Omega^n(A)$$

(où le symbole "'" désigne le (A/J-module dual). La produit tensoriel des deux derniers facteurs s'identifie à $\bigwedge^p (J/J^2)$, donc le tout s'identifie à $\mathrm{Ext}^p_A(A/J\ ,\ \bigwedge^p (J/J^2))$, donc, en vertu de la proposition, à

$$\mathrm{Hom}_A(\bigwedge^p J/J^2\ ,\ \bigwedge^p J/J^2)\ ,$$

i.e. à A/J. En particulier, il y a dans $\mathrm{Ext}^p_A(\Omega^{n-p}(A/J)), \Omega^n(A)$ un élément privilégié, correspondant à l'élément unité de A/J, appelé *classe fondamentale* de l'idéal J dans A. (Elle peut en fait se définir sous des conditions sensiblement plus larges). On peut mettre le corollaire 1 sous une forme plus géométrique et plus globale :

COROLLAIRE 2. - *Soient* X *une variété non singulière sur un corps algébriquement clos* $\underline{k}$, Y *une sous-variété fermée non singulière de* X, $\underline{O}_X$ *le faisceau des anneaux locaux de* X, $\underline{O}_Y$ *la faisceau des anneaux locaux de* Y *considéré comme un faisceau quotient de* $\underline{O}_X$. *Soient* n *la dimension de* X, $n - p$ *celle de* Y.

Soit Ω_X (resp. Ω_Y) le faisceau des germes de formes différentielles régulières sur X (resp. Y). Alors on a des isomorphismes canoniques :

$$\underline{\mathrm{Ext}}^p_{\underline{O}_X}(\Omega_Y^{n-p}, \Omega_X^n) = \underline{O}_Y \tag{3.6}$$

ou encore

$$\underline{\mathrm{Ext}}^p_{\underline{O}_X}(\underline{O}_Y, \Omega_X^n) = \Omega_Y^{n-p} \tag{3.6 bis}$$

La formule (3.6 bis) peut servir de définition de Ω_Y^{n-p} pour Y variété singulière. De façon précise :

PROPOSITION 5. - Soit Y un sous-ensemble algébrique de dimension $q = n - p$ dans une variété algébrique non singulière X de dimension n. Soient F un faisceau algébrique cohérent sur X de support contenu dans Y, et L un faisceau algébrique localement libre sur X. Alors les faisceaux $\underline{\mathrm{Ext}}^i_{\underline{O}_X}(F, L)$ sont nuls pour $i < p$, tandis que pour $i = p$, on a un isomorphisme canonique

$$\underline{\mathrm{Ext}}^p_{\underline{O}_X}(F, L) = \underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}_X}(F, \underline{\mathrm{Ext}}^p(\underline{O}_X/J, L)) \tag{3.7}$$

où J désigne un faisceau d'idéaux arbitraire sur X annulant F et dont l'ensemble des zéros soit Y. En particulier, si F est un faisceau algébrique cohérent sur Y, on a

$$\underline{\mathrm{Ext}}^p_{\underline{O}_X}(F, L) = \underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}_Y}(F, \underline{\mathrm{Ext}}^p(\underline{O}_Y, L)). \tag{3.7 bis}$$

Enfin, F étant toujours un faisceau algébrique cohérent sur Y, les faisceaux $E^i(F) = \underline{\mathrm{Ext}}^{p+i}_{\underline{O}_X}(F, \Omega_X^n)$ ne dépendent pas de la façon d'immerger l'espace algébrique Y dans une variété non singulière X.

La question étant locale, on peut supposer X affine et $L = \underline{O}_X$. Cela ramène à une question d'algèbre commutative, et même d'algèbre locale : Si A est une localité régulière, M un A-module dont le support est de dimension $\leq q = n - p$ prouver que $\mathrm{Ext}^i_A(M, A) = 0$ pour $i < p$, et $\mathrm{Ext}^p_A(M, A) = \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Ext}^p(A/J, A))$, où J est un idéal quelconque de "dimension" $\leq q$ annulant M. Pour le premier point, on procède par récurrence sur q : un dévissage immédiat ramène au cas où M est de la forme A/J, puis, en remplaçant J par un idéal plus petit et utilisant l'hypothèse de récurrence, et la suite exacte des Ext, au cas où J est engendré par un "système de paramètres" comme dans la proposition 4 et où le résultat est immédiat. Le résultat précédent implique que si J est un idéal fixé de "dimension" $\leq q$; alors le foncteur contravariant $E(M) = \mathrm{Ext}^p_A(M , A)$ sur la catégorie des A/J-modules est exact à gauche; de plus il transforme sommes directes en produits directs, d'où résulte facilement que $E(M) = \mathrm{Hom}_A(M , E(A))$. Enfin, la dernière assertion de la proposition 5 est plus subtile, et résulte d'une caractérisation intrinsèque des $E^i(F)$ à l'aide d'un théorème de dualité locale qui ne peut être donné ici.

COROLLAIRE. - *Désignons par* ω^q_Y *le faisceau* $\underline{\mathrm{Ext}}^p_{\underline{O}_X}(\underline{O}_Y , \underline{\Omega}^n_X)$. *Alors on a un isomorphisme fonctoriel pour les faisceaux algébriques cohérents* F *sur* Y :

$$\underline{\mathrm{Ext}}^p_{\underline{O}_X}(F , \underline{\Omega}^n_X) = \underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}_X}(F , \omega^q_Y) \tag{3.8}$$

4. Classe de cohomologie associée à une sous-variété.

Dans toute la suite, X désigne un ensemble algébrique de dimension n , défini sur un corps $\underline{k}$, que nous supposerons algébriquement clos pour simplifier. Sauf au n° 6, X est supposée non singulière. On désigne par $\underline{O}_X$ le faisceau des anneaux locaux sur X , par $\underline{\Omega}^*_X = \bigcup_p \Omega^p_X$ le faisceau des germes de formes différentielles sur X . Si Y est une partie fermée de X , on identifie les faisceaux algébriques cohérents sur Y à des faisceaux cohérents sur X nuls hors de Y ; il en est en particulier ainsi de $\underline{O}_Y$ et $\underline{\Omega}_Y$.

LEMME 1. - *Soient* F *un faisceau algébrique cohérent sur* X *dont le support est de dimension* $\leq n - p$, L *un faisceau algébrique cohérent localement libre sur* X . *Alors* $\mathrm{Ext}^i_{\underline{O}_X}(X ; F , L)$ *est nul pour* $i < p$, *et on a un isomorphisme canonique*

$$\mathrm{Ext}^p_{\underline{O}}(X ; F , L) = H^0(X , \underline{\mathrm{Ext}}^p_{\underline{O}}(F , L)) \tag{4.1}$$

Si F *est un faisceau algébrique cohérent sur une partie fermée* M *de* X *de dimension* $\leq n - p$, *on a un isomorphisme canonique*

$$\underline{\mathrm{Ext}}^p_{\underline{O}_X}(F , L) = \underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}_X}(F \otimes L' \otimes \underline{\Omega}^n_X , \omega^{n-p}_Y) \tag{4.1 bis}$$

où ω^{n-p}_Y *est le faisceau sur* Y *défini dans le corollaire à proposition* 5, *(qui s'identifie à* $\underline{\Omega}^{n-p}_Y$ *si* Y *est non singulière).*

La formule (4.1) est une conséquence immédiate de la suite spectrale de la proposition 1, et de la proposition 5; en vertu de la formule (3.8) on peut écrire

$$\underline{\mathrm{Ext}}^p_{\underline{O}_X}(F,L) = L\otimes(\underline{\Omega}^n_X)' \otimes \underline{\mathrm{Ext}}_{\underline{O}_X}(F,\underline{\Omega}^n_X) = L \otimes (\underline{\Omega}^n_X)' \otimes \underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}_X}(F,\underline{\omega}^q_Y) = \underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}_X}(F\otimes L'\otimes \underline{\Omega}^n_X,\underline{\omega}^q_Y)$$

où $q = n - p$, d'où la formule (4.1 bis).

Faisons en particulier $F = \underline{O}_Y$, $L = \underline{\Omega}^p_X$, on trouve, compte tenu que $\underline{\Omega}^n_X \otimes (\underline{\Omega}^p_X)' = \underline{\Omega}^{n-p}_X$, un isomorphisme canonique

$$(4.2) \qquad \mathrm{Ext}^p_{\underline{O}_X}(X\ ;\ \underline{O}_Y\ ,\ \underline{\Omega}^p_X) = \mathrm{Hom}_{\underline{O}_X}(X\ ;\ \underline{\Omega}^{n-p}_X\ ,\ \underline{\omega}^{n-p}_Y)$$

Supposons maintenant Y non singulière pour simplifier, donc $\underline{\omega}^{n-p}_Y = \underline{\Omega}^{n-p}_Y$. On a un homomorphisme naturel de $\underline{\Omega}^{n-p}_X$ dans $\underline{\Omega}^{n-p}_{Y'}$ d'où une section canonique s_Y du faisceau $\underline{\mathrm{Ext}}^p_{\underline{O}_X}(\underline{O}_Y\ ,\ \underline{\Omega}^p_X)$, que nous appellerons, si toutes les composantes de Y sont de dimension $n - p$, section fondamentale du faisceau $\underline{\mathrm{Ext}}^p_{\underline{O}_X}(\underline{O}_Y\ ,\ \underline{\Omega}^p_X)$ Cette section définit en vertu de (4.1) un élément de $\mathrm{Ext}^p_{\underline{O}_X}(X\ ;\ \underline{O}_Y\ ,\underline{\Omega}^p_X)$. Or l'homomorphisme naturel $\underline{O}_X \to \underline{O}_Y$ définit un homomorphisme

$$\mathrm{Ext}^p_{\underline{O}_X}(X\ ;\ \underline{O}_Y\ ,\underline{\Omega}^p_X) \to \mathrm{Ext}^p_{\underline{O}_X}(X\ ;\ \underline{O}_X\ ,\ \underline{\Omega}^p_X) = H^p(X\ ,\ \underline{\Omega}^p_X)\ .$$

On obtient ainsi un élément de $H^p(X\ ,\ \underline{\Omega}^p_X)$, noté $P_X(Y)$ et appelé classe de cohomologie de Y dans X . Elle est donc déduite de la section s_Y de $\underline{\mathrm{Ext}}^p_{\underline{O}_X}(\underline{O}_Y\ ,\ \underline{\Omega}^p_X)$ par le diagramme d'homomorphismes suivants :

$$(4.3) \quad H^p(X\ ,\underline{\Omega}^p_X) = \mathrm{Ext}^p_{\underline{O}_X}(X\ ;\ \underline{O}_X\ ,\underline{\Omega}^p_X) \leftarrow \mathrm{Ext}^p_{\underline{O}_X}(X\ ;\ \underline{O}_Y\ ,\underline{\Omega}^p_X) \xrightarrow{\sim} H^o(X\ ,\ \underline{\mathrm{Ext}}^p_{\underline{O}_X}(\underline{O}_Y,\underline{\Omega}^p_X))$$

Appelons cycle non singulier de dimension $n - p$ un élément du groupe abélien libre engendré par les sous-variétés irréductibles non singulières de dimension $n - p$ dans X . Alors la fonction $Y \to P(Y)$ se prolonge en un homomorphisme du groupe des cycles non singuliers de dimension $n - p$ sur X , dans le groupe $H^p(X\ ,\ \underline{\Omega}^p_X)$.

Soient Z^{n-p} et $Z'^{n-p'}$ des cycles non singuliers de dimension $n - p$ et $n - p'$, on dit qu'ils se coupent transversalement, si toute composante de Z coupe transversalement toute composante de Z' . Alors le cycle $Z.Z'$ est défini, c'est un cycle non singulier de dimension $n - p - p'$. Ceci dit, on a le

THÉORÈME 1. - <u>Si</u> Z^{n-p} <u>et</u> $Z'^{n-p'}$ <u>sont des cycles non singuliers qui se coupent transversalement, alors on a</u>

$$P_X(Z.Z') = P_X(Z).P_X(Z') \tag{4.4}$$

<u>où le produit du deuxième membre est le cup-produit</u>

$$H^p(X\,,\,\underline{\Omega}_X^p) \times H^{p'}(X\,,\,\underline{\Omega}_X^{p'}) \to H^{p+p'}(X\,,\,\underline{\Omega}_X^{p+p'}) \;.$$

(On suppose que X est isomorphe à une partie localement fermée d'un espace projectif)

Cette dernière hypothèse nous sert uniquement pour pouvoir conclure que tout faisceau algébrique cohérent sur X est quotient d'un faisceau algébrique cohérent localement libre (SERRE), donc admet une résolution gauche par des faisceaux localement libres. Pour prouver le théorème 1, on peut supposer que Z et Z' sont des sous-variétés irréductibles non singulières Y et Y' se coupant transversalement. Soit L_* une résolution gauche de $\underline{O}_Y$ par des faisceaux localement libres, alors en vertu de proposition 3, le diagramme d'homomorphismes (4.3) s'identifie au diagramme

$$R^p\Gamma(\underline{\Omega}_X^p) \xleftarrow{\alpha} (\underline{\underline{R}}^p\Gamma)\ (\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}_X}(L_*\,,\,\underline{\Omega}_X^p)) \xrightarrow[\sim]{\beta} \Gamma(H^p(\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}_X}(L_*\,,\,\underline{\Omega}_X^p)))$$

où Γ est le foncteur "groupe des sections" sur la catégorie des faisceaux abéliens sur X, et $\underline{\underline{R}}^p\Gamma$ désigne l'hypercohomologie de dimension p dudit foncteur, et $R^p\Gamma$ son p-ième foncteur dérivé. On supposera pour simplifier que $L_o = \underline{O}_X$ et que l'augmentation $L_o \to O_Y$ est l'homomorphisme naturel (ce qui est loisible), alors α est déduit de l'homomorphisme de complexes $\underline{O}_X \to L$ ($\underline{O}_X$ étant considéré comme un complexe réduit au degré 0), compte tenu que $\underline{\underline{R}}^p\Gamma(K) = R^p\Gamma(K_o)$ si K est un complexe de faisceaux réduit au degré 0.
L'homomorphisme β est un "edge-homomorphism" bien connu. Considérons un diagramme analogue, relatif à une résolution localement libre L'_* de $\underline{O}_{Y'}$, et considérons le diagramme commutatif d'accouplements :

$$(4.5)\left\{\begin{array}{ccccc}
R^p\Gamma(\underline{\Omega}_X^p) & \longleftarrow & \underline{\underline{R}}^p\Gamma(\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}_X}(L_*\,,\underline{\Omega}_X^p)) & \xrightarrow{\sim} & \Gamma(H^p(\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}_X}(L_*\,,\underline{\Omega}_X^p))) \\
\times & & \times & & \times \\
R^{p'}\Gamma(\underline{\Omega}_X^{p'}) & \longleftarrow & \underline{\underline{R}}^{p'}\Gamma(\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}_X}(L'_*\,,\underline{\Omega}_X^{p'})) & \xrightarrow{\sim} & \Gamma(H^{p'}(\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}_X}(L'_*\,,\underline{\Omega}_X^{p'}))) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
R^{p+p'}\Gamma(\underline{\Omega}_X^{p+p'}) & \longleftarrow & \underline{\underline{R}}^{p+p'}\Gamma(\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}_X}(L_*\otimes L'_*\,,\underline{\Omega}_X^{p+p'})) & \xrightarrow{\sim} & \Gamma(H^{p+p'}(\mathrm{Hom}_{\underline{O}_X}(L_*\otimes L'_*,\underline{\Omega}_X^{p+p'})))
\end{array}\right.$$

Les accouplements des deux colonnes de droite sont déduits de l'accouplement de complexes de faisceaux

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}_X}(L_*\,,\,\Omega_X^p) \times \underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}_X}(L'_*,\Omega_X^{p'}) \to \underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}_X}(L_* \otimes L'_*\,,\,\Omega_X^{p+p'})$$

que l'on définit à l'aide du produit extérieur $\Omega_X^p \times \Omega_X^{p'} \to \Omega_X^{p+p'}$. L'accouplement de la première colonne est le cup-produit (relatif au produit extérieur). Je dis que la dernière ligne de (4.5) s'identifie au diagramme d'isomorphismes analogue à (4.3), où Y est remplacé par $Y \cap Y'$ et p par $p + p'$. Pour ceci, il suffit de montrer que $L \otimes L'$ est une résolution (évidemment localement libre) de $\underline{O}_{Y \cap Y'}$. Or on a en effet

$$H_o(L \otimes L') = \underline{O}_Y \otimes \underline{O}_{Y'} = \underline{O}_{Y \cap Y'}$$

et

$$H_i(L \otimes L') = \mathrm{Tor}_i^{\underline{O}_X}(\underline{O}_Y\,,\,\underline{O}_{Y'}) = 0$$

pour $i > 0$, du fait que Y et Y' se coupent transversalement. Le théorème 1 résulte maintenant de la formule :

$$s_Y . s_{Y'} = s_{Y.Y'} \tag{4.6}$$

(où le produit du premier membre est celui de la dernière colonne de (4.5)). Cette formule (4.6), de nature purement locale, se vérifie sans difficultés en prenant pour L_* et L'_* les résolutions envisagées dans proposition 4. On démontre de même (par une démonstration plus facile) que $Z \to P_X(Z)$ est compatible avec le produit cartésien :

$$P_{X \times X'}(Z \times Z') = P_X(Z) \otimes P_{X'}(Z') \tag{4.7}$$

(formule valable si Z resp. Z' , est un cycle non singulier sur la variété non singulière X , resp. X', $Z \times Z'$ étant considéré comme un cycle non singulier sur $X \times X'$). De (4.4) et (4.7) on déduit que $P_X(Z)$ est aussi compatible avec l'opération "image inverse" par un morphisme de variétés non singulières $f : X \to X'$:

$$P_X(f^{-1}(Z')) = f^*(P_{X'}(Z)) \tag{4.8}$$

formule valable si Z est un cycle non singulier sur X' tel que f soit "transversale" à Z , i.e. tel que le graphe de f soit transversal au cycle $X \times Z'$ dans $X \times X'$.

COROLLAIRE 1. – <u>Soient X, X' deux variétés non singulières localement fermées dans un espace projectif, supposons X' complète. Soient U un cycle non singulier sur $X \times X'$, a et b deux points de X' tels que U coupe transversalement les cycles $X \times (a)$ et $X \times (b)$, soient Z et Z' les cycles non singuliers sur X tels que $Z \times (a) = (X \times (a)).U$, $Z \times (b) = (X \times (b)).u$. Alors on a</u>

$$P_X(Z) = P_X(Z') .$$

En effet, soit $f_a : X \longrightarrow X \times X'$ défini par $f_a(x) = (x, a)$, on a alors en vertu de (4.8) la formule $P(Z) = f_a^*(P(U))$, de même $P(Z') = f_b^*(P(U))$. Or, utilisant la formule de Künneth

$$H^*(X \times X', \underline{\Omega}^*_{X \times X'}) = H^*(X, \underline{\Omega}^*_X) \otimes H^*(X', \underline{\Omega}^*_{X'})$$

et le fait que $H^0(X', \underline{\Omega}_{X'})$ est réduit aux scalaires, on obtient facilement $f_a^* = f_b^*$, d'où la conclusion.

Pour tout $x \in X$, (x) est une sous-variété non singulière de X de codimension n, et définit donc un élément ε_x de $H^n(X, \underline{\Omega}^n_X)$. Si X est une variété projective non singulière, il résulte du corollaire 1 que ε_x ne dépend pas du point x choisi, on le note ε_X et on l'appelle <u>classe fondamentale</u> de $H^n(X, \underline{\Omega}^n_X)$.

REMARQUE. – Pour avoir une théorie satisfaisante, il faudrait définir $P_X(Z)$ pour des cycles Z quelconques, et prouver le théorème 1 pour une intersection propre de cycles. (Au moment d'écrire cet exposé, cela n'est pas encore fait en toute généralité). Admettant que cela est fait, le corollaire 1 devient : si Z et Z' sont deux cycles algébriquement équivalents, alors $P_X(Z) = P_X(Z')$ (énoncé qui ne semble par résulter de ce qui précède, même si Z et Z' sont non singuliers).

5. <u>Le théorème de dualité.</u>

Dans ce numéro, X désigne une variété projective non singulière de dimension n.

THÉORÈME 2. – <u>La classe fondamentale ε_X de $H^n(X, \underline{\Omega}^n_X)$ est une base de cet espace vectoriel.</u>

(La démonstration sera donnée plus bas). Moyennant le théorème précédent on peut donc identifier $H^n(X, \underline{\Omega}^n_X)$ au corps $\underline{k}$. Considérons maintenant les accouplements envisagés au n° 2, qui donnent en particulier un accouplement

$$\mathrm{Ext}^p_{\underline{O}_X}(X\ ;\ \underline{O}_X\ ,\ F) \times \mathrm{Ext}^{n-p}_{\underline{O}_X}(X\ ;\ F\ ,\ \underline{\Omega}^n_X) \longrightarrow \mathrm{Ext}^n_{\underline{O}_X}(X\ ;\ \underline{O}_X\ ,\ \underline{\Omega}^n_X)\ ,\quad \text{i.e.}$$

(5.1) $$H^p(X\ ,\ F) \times \mathrm{Ext}^{n-p}_{\underline{O}_X}(X\ ;\ F\ ,\ \underline{\Omega}^n_X) \longrightarrow H^n(X\ ,\ \underline{\Omega}^n_X)$$

Compte tenu du théorème 2, cet accouplement définit un homomorphisme

(5.2) $$\mathrm{Ext}^{n-p}_{\underline{O}_X}(X\ ;\ F\ ,\ \underline{\Omega}^n_X) \longrightarrow (H^p(X\ ,\ F))'$$

Cet homomorphisme est fonctoriel en F, et permute aux homomorphismes cobords relatifs aux suites exactes $0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow F'' \longrightarrow 0$.

THÉORÈME 3. - L'homomorphisme (5.2) est un isomorphisme.

On retrouve en particulier le résultat de Serre :

COROLLAIRE. - Soient E un fibré vectoriel algébrique sur X, $\underline{O}_X(E)$ le faisceau des germes de sections régulières de E, on a alors des isomorphismes canoniques :

(5.3) $$(H^p(X\ ,\ \underline{O}_X(E)))' = H^{n-p}(X\ ,\ \underline{\Omega}^n_X \otimes \underline{O}_X(E'))$$

Il suffit d'appliquer le théorème 3 et le corollaire 1 à la proposition 1.

Les théorèmes 2 et 3 vont résulter de l'énoncé suivant :

(D) L'homomorphisme suivant

(5.2 bis) $$\mathrm{Ext}^{n-p}_{\underline{O}_X}(X\ ;\ F\ ,\ \underline{\Omega}^n_X) \longrightarrow (H^p(X\ ,\ F))' \otimes L \qquad (L = H^n(X\ ,\ \underline{\Omega}^n_X))\ ,$$

déduit de l'accouplement (5.1) est un isomorphisme.

Montrons en effet que (D) implique le théorème 2. Soit $\underline{k}_x = \underline{O}_{(x)}$ le faisceau des anneaux locaux de la variété réduite au point $x \in X$, considérons l'homomorphisme canonique $\underline{O}_X \longrightarrow \underline{k}_x$ et l'homomorphisme associé

(5.3) $$H^o(X\ ,\ \underline{O}_X) \longrightarrow H^o(X\ ,\ \underline{k}_x)$$

son transposé s'identifie à l'homomorphisme

(5.4) $$\mathrm{Ext}^n_{\underline{O}_X}(X\ ;\ \underline{k}_x\ ,\ \underline{\Omega}^n_X) \otimes L' \longrightarrow \mathrm{Ext}^n_{\underline{O}_X}(X\ ;\ \underline{O}_X\ ,\ \underline{\Omega}^n_X) \otimes L'$$

déduit de l'homomorphisme sur les Ext^n associé à $\underline{O}_X \longrightarrow \underline{k}_x$:

(5.5) $$\mathrm{Ext}^n_{\underline{O}_X}(X\ ;\ \underline{k}_x\ ,\ \underline{\Omega}^n_X) \longrightarrow \mathrm{Ext}^n_{\underline{O}_X}(X\ ;\ \underline{O}_X\ ,\ \underline{\Omega}^n_X) = H^n(X\ ,\ \underline{\Omega}^n_X)$$

Comme (5.3) est un isomorphisme, il en est de même de (5.4), donc aussi de (5.5). Comme $s_{(x)}$ est une base de $\mathrm{Ext}^n_{\underline{O}_X}(X\ ;\ \underline{k}_x\ ,\ \underline{\Omega}^n_X)$ en vertu de (4.2), il s'ensuit bien que son image ε_X est une base de $H^n(X\ ,\ \underline{\Omega}^n_X)$.

Reste à prouver l'énoncé (D), qui résultera de façon purement formelle des faits élémentaires résumés dans les lemmes suivants. On y suppose que X est une partie fermée (singulière ou non) de l'espace projectif P de dimension r. On utilise la notation $\underline{O}_P(m)$ pour le faisceau sur P noté $\underline{O}(m)$ dans [3], et la notation $\underline{O}_X(m)$ pour le faisceau analogue sur X.

LEMME 2. - L'énoncé (D) est vrai si $X = P$ et $F = \underline{O}_P(m)$

Ce lemme se vérifie par un calcul direct. Le calcul explicite des $H^i(P\ ,\ \underline{O}_P(m))$ se trouve dans [3], mais il peut se faire plus élémentairement. La computation du cup-produit $H^i(P\ ,\ \underline{O}_P(m)) \times H^j(P\ ,\ \underline{O}_P(m')) \to H^{i+j}(P\ ,\ \underline{O}_P(r+m+m'))$ nécessaire pour expliciter l'accouplement (5.1) n'offre pas de difficultés.

LEMME 3. - Tout faisceau algébrique cohérent F sur X est isomorphe à un faisceau quotient d'un faisceau $\underline{O}_X(-m)^k$, où on peut supposer m aussi grand que l'on veut.

Résulte du fait que $F \otimes \underline{O}_X(m)$ est "engendré par ses sections" pour m grand, cf [3].

LEMME 4. - Soit $i > 0$. Alors $H^{r-i}(P\ ,\ \underline{O}_P(-m)) = 0$ pour m grand ; et pour tout faisceau algébrique cohérent B sur X, on a $\mathrm{Ext}^i_{\underline{O}_X}(X\ ;\ \underline{O}_X(-m)\ ,\ B) = 0$ pour m grand.

Le premier énoncé résulte des calculs explicites mentionnés plus haut, pour le deuxième on note qu'on a un isomorphisme

$$\mathrm{Ext}^i_{\underline{O}_X}(X\ ;\ \underline{O}_X(-m)\ ,\ B) = H^i(X\ ,\ B \otimes \underline{O}(m))$$

(proposition 1, corollaire 1), d'où la conclusion en vertu d'un résultat bien connu de [3]. Conjuguant les deux lemmes précédents, on trouve le

COROLLAIRE. - Soit $i > 0$. Alors le foncteur $F \to H^{r-i}(P\ ,\ F)$ sur la catégorie des faisceaux algébriques cohérents sur P est coeffaçable, et il en est de même du foncteur $\mathrm{Ext}^i_{\underline{O}_X}(X\ ;\ F\ ,\ B)$ sur la catégorie des faisceaux algébriques cohérents sur X.

LEMME 5. - Soient A et B deux faisceaux algébriques cohérents sur X, posons $A(m) = A \otimes \underline{O}_X(m)$. Alors pour m assez grand, l'homomorphisme canonique

$$\mathrm{Ext}^i_{\underline{O}_X}(X\ ;\ A(-m)\ ,\ B) \to H^0(X\ ,\ \underline{\mathrm{Ext}}^i_{\underline{O}_X}(A(-m)\ ,\ B)) = H^0(X\ ,\ \underline{\mathrm{Ext}}^i_{\underline{O}_X}(A\ ,\ B)(m))$$

est un isomorphisme.

Cela résulte aussitôt de la suite spectrale de la proposition 1 appliquée à $A(-m)$ et B, puisque l'on aura

$$E_2^{p,q}(A(-m)\ ,\ B) = H^p(X\ ,\ \underline{\mathrm{Ext}}^q_{\underline{O}_X}(A(-m)\ ,\ B)) = H^p(X\ ,\ \underline{\mathrm{Ext}}^q_{\underline{O}_X}(A\ ,\ B)(m))\ ,$$

qui est nul pour $p > 0$ et m grand.

Démontrons alors (D) dans le cas où $X = P$. Nous prouvons d'abord que (5.2 bis) est un isomorphisme pour $p = n$; comme les deux membres sont alors des foncteurs exacts à gauche (puisque $H^{r+1}(P\ ,\ F) = 0$), il résulte du lemme 3 qu'il suffit de prouver l'assertion pour $F = \underline{O}_P(-n)$, or elle est alors contenue dans le lemme 2. Comme les homomorphismes (5.2 bis) sont fonctoriels et compatibles avec les opérateurs cobords, et que pour $p < n$ les deux membres de (5.2 bis) sont des foncteurs coeffaçables en F (corollaire du lemme 4), il s'ensuit alors par un raisonnement standard que (5.2 bis) est un isomorphisme pour tout p. Cela prouve le théorème de dualité pour l'espace projectif.

Supposons maintenant X quelconque, mais non singulier. D'après le théorème de dualité pour P, on a un isomorphisme,

$$H^n(X\ ,\ F)' = H^n(P\ ,\ F)' = \mathrm{Ext}^{r-n}_{\underline{O}_P}(P\ ;\ F\ ,\ \underline{\Omega}^r_P)$$

En vertu du lemme 1 (n° 4) le dernier membre s'identifie à

$$\mathrm{Hom}_{\underline{O}_P}(P\ ;\ F\ ,\ \underline{\omega}^n_X) = \mathrm{Hom}_{\underline{O}_X}(X\ ;\ F\ ,\ \underline{\Omega}^n_X) = \mathrm{Ext}^0_{\underline{O}_X}(X\ ;\ F\ ,\ \underline{\Omega}^n_X)$$

d'où un isomorphisme

$$H^n(X\ ,\ F)' = \mathrm{Hom}_{\underline{O}_X}(X\ ;\ F\ ,\ \underline{\Omega}^n_X) = \mathrm{Ext}^0_{\underline{O}_X}(X\ ;\ F\ ,\ \underline{\Omega}^n_X) \tag{5.6}$$

Faisant $F = \underline{\Omega}^n_X$, on trouve un isomorphisme

$$\eta : H^n(X\ ,\ \underline{\Omega}^n_X) \xrightarrow{\sim} \underline{k} \tag{5.7}$$

On vérifie que l'isomorphisme (5.6) n'est autre que (5.2 bis) pour $p = n$, quand on y fait $L = \underline{k}$ grâce à (5.7). Par suite, (5.2 bis) est un isomorphisme pour $p = n$. Pour prouver que c'est un isomorphisme pour tout p, il suffit encore de prouver que pour $p < n$, les deux membres de (5.2 bis) sont des foncteurs coeffaçables en F, et a fortiori (compte tenu du lemme 3) que les deux membres sont nuls quand on fait $F = \underline{O}_X(-m)$ avec m grand. Or pour le premier membre cela est vrai en vertu du lemme 4, et pour le deuxième membre on écrit, utilisant le théorème de dualité sur P :

$$H^p(X , \underline{O}_X(-m))' = \mathrm{Ext}^{r-p}_{\underline{O}_P}(P ; \underline{O}_X(-m) , \underline{\Omega}^r_P) .$$

Le deuxième membre est nul pour $p < n$ et m grand, comme il résulte du lemme 5 (où on fait $X = P$) et du fait que $\underline{O}_X$ est en tant que faisceau algébrique cohérent sur P, de dimension cohomologique $\leq r - n$, (car X est non singulière) d'où

$$\underline{\mathrm{Ext}}^{r-p}_{\underline{O}_P}(\underline{O}_X , \underline{\Omega}^r_P) = 0 \qquad \text{pour } p < n .$$

6. <u>Le théorème de dualité pour les variétés singulières.</u>

Soit X une partie fermée de dimension n de l'espace projectif P de dimension r. La formule (5.6) doit s'écrire ici

$$(6.1) \qquad H^n(X , F)' \simeq \mathrm{Hom}_{\underline{O}_X}(X ; F , \underline{\omega}^n_X) = \mathrm{Ext}^0_{\underline{O}_X}(X ; F , \underline{\omega}^n_X)$$

où on a posé

$$(6.2) \qquad \underline{\omega}^n_X = E^0(\underline{O}_X) = \underline{\mathrm{Ext}}^{r-n}_{\underline{O}_P}(\underline{O}_X , \underline{\Omega}^r_P)$$

Comme il a été dit dans la proposition 5, le faisceau ainsi introduit ne dépend pas en fait de l'immersion choisie de X dans une variété non singulière P. Faisant, dans (6.1), $F = \underline{\omega}^n_X$, on trouve

$$(6.2) \qquad H^n(X , \underline{\omega}^n_X)' \simeq \mathrm{Hom}_{\underline{O}_X}(X ; \underline{\omega}^n_X , \underline{\omega}^n_X)$$

d'où l'existence d'un élément privilégié dans $H^n(X , \underline{\omega}^n_X)'$, correspondant à l'homomorphisme identique de $\underline{\omega}^n_X$ dans lui-même :

$$(6.3) \qquad \eta : H^n(X , \underline{\omega}^n_X) \to \underline{k}$$

Considérons alors les accouplements définis par la composition des Ext :

$$\text{(6.4)} \qquad H^p(X\,,\,F) \times \operatorname{Ext}^{n-p}_{\underline{O}_X}(X\,;\,F\,,\,\underline{\omega}^n_X) \longrightarrow H^n(X\,,\,\underline{\omega}^n_X)$$

et composons-les avec l'homomorphisme η de (6.3), on obtient des homomorphismes fonctoriels, compatibles avec les opérateurs bord :

$$\text{(6.5)} \qquad \operatorname{Ext}^{n-p}_{\underline{O}_X}(X\,;\,F\,,\,\underline{\omega}^n_X) \longrightarrow H^p(X\,,\,F)'$$

(généralisant (5.2)). On vérifie que pour $p = n$, on obtient ainsi l'isomorphisme (6.1). Ceci posé, on a le

THÉORÈME 3 bis. - <u>Les quatre conditions suivantes sur</u> X <u>sont équivalentes pour un entier</u> $k \geqslant 0$ <u>donné</u> :

i. <u>L'homomorphisme fonctoriel</u> (6.5) <u>est un isomorphisme pour</u> $n - k \leqslant p \leqslant n$.

ii. <u>On a</u> $H^p(X\,,\,\underline{O}_X(-m)) = 0$ <u>pour</u> m <u>grand et pour</u> $n - k \leqslant p < n$.

iii. <u>Le foncteur</u> $H^p(X\,,\,F)$ <u>sur la catégorie des faisceaux algébriques cohérents sur</u> X <u>est coeffaçable pour</u> $n - k \leqslant p < n$.

iv. <u>On a</u> $E^i(\underline{O}_X) = \underline{\operatorname{Ext}}^{r-n+i}_{\underline{O}_P}(\underline{O}_X\,,\,\underline{\omega}^r_P) = 0$ <u>pour</u> $0 < i \leqslant k$.

DÉMONSTRATION. - i. $\Rightarrow$ ii. en vertu du lemme 4, ii. $\Rightarrow$ iii. en vertu du lemme 3, iii. $\Rightarrow$ i. par un raisonnement standard bien connu, compte tenu que les deux membres de (6.5) sont alors des foncteurs coeffaçables pour $n - k \leqslant p < n$ (le premier l'étant en vertu du lemme 4). Enfin prouvons ii. $\Leftrightarrow$ iv. Cela résulte du corollaire à la proposition qui suit :

PROPOSITION 6. - <u>Soit</u> F <u>un faisceau algébrique cohérent sur</u> X, <u>et soit</u> i <u>un entier. Alors pour</u> m <u>assez grand, on a un isomorphisme</u> :

$$\text{(6.6)} \qquad H^i(X\,,\,F(-m))' \simeq H^o(X\,,\,E^{n-i}(F)(m))\,,$$

<u>où on pose</u> (comparer n° 3, proposition 5) :

$$\text{(6.7)} \qquad E^j(F) = \underline{\operatorname{Ext}}^{r-n+j}_{\underline{O}_P}(F\,,\,\underline{\Omega}^r_P)$$

En effet, en vertu du théorème de dualité sur P, le premier membre de (6.6) est isomorphe à $\operatorname{Ext}^{r-i}_{\underline{O}_P}(P\,;\,F(-m)\,,\,\Omega^r_P)$, donc (6.6) résulte du lemme 5.

COROLLAIRE. - <u>Pour qu'on ait</u> $H^i(X , F(-m)) = 0$ <u>pour</u> m <u>grand, il faut et il suffit que</u> $E^{n-i}(F) = 0$.

Rappelons que les $E^j(F)$ ne dépendent pas en fait de l'immersion projective envisagée. La condition du corollaire est de nature purement locale, par suite, si elle est vérifiée pour F , elle l'est pour tout faisceau localement isomorphe à un faisceau F^n . En particulier, si cette condition est vérifiée pour $\underline{O}_X$, elle l'est pour tout faisceau algébrique cohérent localement libre. C'est par exemple le cas pour tout $i < n$ si X est non singulière, pour $i = 0$ si aucune composante de X n'est réduite à un seul point, pour $i = 0 , 1$ si S est normale et toutes ses composantes sont de dimension >1 (cf. [3]). Pour qu'il en soit ainsi pour tout $i < k$, il faut et il suffit par définition que les anneaux locaux $\underline{O}_x$ $(x \in X)$ soient de "codimension homologique" $\geqslant k$ (cf [4] pour cette notion). Si $k = n$, cela signifie en vertu du théorème 3 bis que le théorème de dualité est vrai pour X , i.e. que (6.5) est un isomorphisme pour tout p et tout F . On peut donner de nombreuses conditions équivalentes sur les anneaux locaux $\underline{O}_x$ pour qu'il en soit ainsi (NAGATA), par exemple celle de vérifier le théorème d'équidimensionalité de Cohen-Macaulay. Il en est ainsi par exemple si localement X est une "intersection complète" dans une variété ambiante non singulière.

7. <u>La dualité de Poincaré</u>.

Soit X une variété projective non singulière de dimension n . Alors $H^*(X) = H^*(X , \underline{\Omega}_X^*)$ est une algèbre anticommutative bigraduée de dimension finie, que nous graduons par le degré total, $H^{p,q}(X) = H^p(X , \underline{\Omega}_X^q)$ étant donc de degré $p + q$. Les degrés de $H^*(X)$ sont compris entre 0 et $2n$. En vertu du théorème 2 et du corollaire au théorème 3, $H^*(X)$ est une "algèbre de Poincaré" de dimension $2n$, i.e. $H^{2n}(X)$ est muni d'un isomorphisme avec le corps de base $\underline{k}$, et le produit $H^m(X)\times H^{2n-m}(X) \rightarrow H^{2n}(X) = \underline{k}$ est une dualité entre $H^m(X)$ et $H^{2n-m}(X)$. De plus, si Y est une autre variété projective non singulière, la formule de Künneth pour les faisceaux algébriques cohérents donne

$$H^*(X\times Y) = H^*(X) \otimes H^*(Y) \tag{7.1}$$

isomorphisme compatible avec les structures d'algèbres de Poincaré. De plus, $H^*(X)$ est, en tant qu'algèbre commutative, un foncteur contravariant en X , un morphisme $f : Y \rightarrow X$ définissant de façon évidente un homomorphisme d'algèbres graduées

$$(7.2) \qquad f^* : H^*(X) \to H^*(Y)$$

Comme il s'agit d'algèbres de Poincaré, on obtient par transposition un homomorphisme d'espaces vectoriels :

$$(7.3) \qquad f_* : H^*(Y) \to H^*(X)$$

On a vu au n° 4 que l'effet de f^* sur les classes de cohomologie correspondant à des cycles non singuliers s'interprète géométriquement en prenant les classes de cohomologie qui correspondent à leurs images inverses. Il importe dans le cas actuel de montrer que (7.3) correspond de même à l'opération "image directe" de cycles. Cela résulte, sous des conditions de non singularité convenable du moins, du cas particulier suivant :

THÉORÈME 4. - <u>Si</u> f <u>est l'application identique d'une sous-variété non singulière</u> Y^m <u>de</u> X^n <u>dans</u> X^n, <u>alors, désignant par</u> 1_Y <u>l'élément unité de</u> $H(Y)$ <u>on a</u>

$$(7.4) \qquad f_*(1_Y) = P_X(Y)$$

<u>où le deuxième membre est la classe de cohomologie dans</u> X <u>associée à</u> Y.

Cette formule est équivalente à

$$(7.4\ \text{bis}) \qquad \langle \xi^{m,m}, P_X(Y) \rangle \varepsilon_Y = f_*(\xi^{m,m}) \qquad (\xi^{m,m} \in H^m(X, \underline{\Omega}_X^m))$$

où ε_Y est l'élément fondamental dans $H^m(Y, \Omega_Y^m)$, et constitue, dans le cas des variétés projectives non singulières, une nouvelle définition de la classe de cohomologie associée à Y. Pour démontrer le théorème 4, on interprète grâce au théorème 3 la transposée de l'homomorphisme

$$H^m(X, \underline{\Omega}_X^m) \to H^m(Y, \underline{\Omega}_Y^m) = H^m(X, \underline{\Omega}_Y^m)$$

comme l'homomorphisme

$$(7.5) \quad H^{n-m}(X, \underline{\Omega}_X^{n-m}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^{n-m}_{\underline{O}_X}(X; \underline{\Omega}_X^m, \underline{\Omega}_X^n) \leftarrow \mathrm{Ext}^{n-m}_{\underline{O}_X}(X; \underline{\Omega}_Y^m, \underline{\Omega}_X^n) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\underline{O}_X}(X; \underline{\Omega}_Y^m, \underline{\Omega}_Y^m)$$

On vérifie que l'élément 1_Y du dual de $H^m(Y, \underline{\Omega}_Y^m)$ s'identifie à l'élément du membre de droite correspondant à l'endomorphisme identique de $\underline{\Omega}_Y^m$, et d'autre part que l'image de cet élément dans $H^{n-m}(X, \underline{\Omega}_X^{n-m})$ est bien $P_X(Y)$. Ces compatibilités, qui auraient pu être données dès le n° 4, peuvent s'énoncer, et sont valables en fait, pour des variétés non singulières quelconques, la deuxième la deuxième par exemple résultant de la commutativité du diagramme suivant d'endomorphismes canoniques :

$$
(7.6)\quad \left\{\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Ext}^{n-m}_{\underline{O}_X}(X\,;\,\underline{\Omega}^m_X\,,\,\underline{\Omega}^n_X) & \longleftarrow & \mathrm{Ext}^{n-m}_{\underline{O}_X}(X\,;\,\underline{\Omega}^m_Y\,,\,\underline{\Omega}^n_X) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Hom}_{\underline{O}_X}(X\,;\,\underline{\Omega}^m_Y\,,\,\underline{\Omega}^n_Y) \\
\downarrow & & & & \downarrow \\
\mathrm{Ext}^{n-m}_{\underline{O}_X}(X\,;\,\underline{O}_X\,,\,\underline{\Omega}^{n-m}_X) & \longleftarrow & \mathrm{Ext}^{n-m}_{\underline{O}_X}(X\,;\,\underline{O}_Y\,,\,\underline{\Omega}^{n-m}_X) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Hom}_{\underline{O}_X}(X\,;\,\underline{\Omega}^n_X\,,\,\underline{\Omega}^m_Y)
\end{array}\right.
$$

On obtient ainsi un équivalent exact du formalisme de la dualité de Poincaré sur les variétés orientées compactes. En particulier, le théorème 4 permet de déterminer la classe de cohomologie associée à la diagonale de $X \times X$. Par un raisonnement bien connu, on en déduit par exemple une formule de Lefschetz :

THÉORÈME 5. - Soit f un endomorphisme d'une variété projective non singulière X , telle que les points fixes de f soient de multiplicité 1. Alors le nombre de ces points fixes est congru, mod la caractéristique de k à la somme alternée des traces des endomorphismes des $H^i(X)$ définis par f .

La restriction sur f qu'on a dû faire tient aux difficultés mentionnées dans la remarque du n° 4. On notera, toutefois, que la formule de Lefschetz reste vraie si f est "homotope" à un endomorphisme dont tous les points fixes sont de multiplicité 1.

8. Généralisation du théorème de dualité.

Soit X une variété algébrique non singulière telle que tout faisceau algébrique cohérent F sur X soit isomorphe à un quotient d'un faisceau algébrique cohérent localement libre (ce qui est le cas si X est localement fermé dans un espace projectif). Alors tout faisceau algébrique cohérent F sur X admet une résolution finie L par des faisceaux localement libres, et pour deux telles résolutions on peut toujours trouver une troisième, et un homomorphisme de celle-ci dans les deux premières compatibles avec les augmentations. De même, si L est une résolution finie localement libre de F , et si on se donne un homomorphisme $F' \to F$, alors il existe une résolution finie localement libre L' de F' et un homomorphisme $L' \to L$ compatible avec $F' \to F$, qu'on peut supposer surjectif si $F' \to F$ l'est. Cela permet de définir, étant donnés deux entiers $r\ ,\ s \geqslant 0$, deux multifoncteurs, cohomologiques, en des arguments $A_1\ ,\ \dots\ ,\ A_r\ ;\ B_1\ ,\ \dots\ ,\ B_s$

variant dans la catégorie des faisceaux algébriques cohérents sur X, et dont les valeurs sont dans la catégorie des faisceaux algébriques cohérents sur X, resp. dans la catégorie des modules sur $H^0(X, \underline{O}_X)$, par les formules :

$$(8.1)\quad \begin{cases} \underline{T}_r^{s*}(A_1, \ldots, A_r; B_1, \ldots, B_s) = \underline{H}^*(\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}_X}(\underline{L}(A_1) \otimes \cdots \otimes \underline{L}(A_r), \underline{L}(B_1) \otimes \cdots \otimes \underline{L}(B_s))) \\ T_r^{s*}(A_1, \ldots, A_r; B_1, \ldots, B_s) = \underline{\underline{R}}^* \Gamma(\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}_X}(\underline{L}(A_1) \otimes \cdots \otimes \underline{L}(A_r), \underline{L}(B_1) \otimes \cdots \otimes \underline{L}(B_s))) \end{cases}$$

Dans cette formule, $\underline{L}(F)$ désigne une résolution finie localement libre du faisceau algébrique cohérent F, et $\underline{\underline{R}}^* \Gamma(K)$ désigne l'hypercohomologie de l'espace X par rapport au complexe de faisceaux K. Si r ou s est nul, on remplace le produit tensoriel des $\underline{L}(A_i)$, resp. des $\underline{L}(B_j)$, par $\underline{O}_X$. En particulier $\underline{T}_o^o$ et T_o^o sont des foncteurs gradués à 0 arguments, $\underline{T}_o^o$ se réduit au degré 0, où il est le faisceau $\underline{O}_X$, tandis que T_o^o est identique à $H^*(X, \underline{O}_X)$. Le fait que les deuxièmes membres de (8.1) ne dépendent pas des résolutions choisies est de toutes façons évident pour la première ligne (la question étant alors locale), et pour la deuxième résulte des remarques générales qui précédaient, compte tenu de la suite spectrale d'hypercohomologie du complexe de faisceaux $K = \underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}_X}(\underline{L}(A_1) \otimes \cdots, \underline{L}(B_1) \otimes \cdots)$, aboutissant à l'hypercohomologie de X par rapport à K, et dont le terme initial est $H^p(X, \underline{H}^q(K))$, i.e.

$$(8.2)\qquad E_2^{p,q} = H^p(X, (\underline{T}_r^s)^{(q)}(A_1, \ldots, A_r; B_1, \ldots, B_s))$$

On voit alors que cette suite spectrale elle-même ne dépend pas des résolutions choisies, son aboutissement est le premier membre de (8.1). On définit facilement les opérateurs cobords relatifs aux divers arguments A_i, B_j, en notant que toute suite exacte $0 \to F' \to F \to F'' \to 0$ peut se résoudre par une suite exacte de complexes finis localement libres.

On définit dans le système des foncteurs $\underline{T}_r^{s*}$, resp. T_r^{s*}, des opérations analogues à celles du calcul tensoriel, et dont la définition est immédiate à partir des formules de définition (8.1). Ainsi, on a une <u>composition</u> (généralisant celle envisagée dans le n° 2) :

$$(8.3)\quad T_r^{s*}(A_1, \ldots, A_r; B_1, \ldots, B_s) \times T_{r'}^{s'*}(A'_1, \ldots, A'_{r'}; B'_1, \ldots, B'_{s'}) \to T_{r+r'}^{s+s'*}(A_1, \ldots, A'_{r'}; B_1, \ldots, B'_{s'})$$

satisfaisant aux propriétés évidentes d'associativité, de compatibilité avec les homomorphismes fonctoriels et les homomorphismes cobords, les suites spectrales. De même, on a des opérations de symétrie qu'on laisse au lecteur le soin d'expliciter. On a de plus une opération de <u>contraction</u> chaque fois que l'un des arguments A_i

est égal à l'un des arguments B_j ;

$$(8.4)\qquad T_r^{s*}(A_1,\dots,A_{i-1},C,A_{i+1},\dots,A_r;B_1,\dots,B_{j-1},C,B_{j+1},\dots,B_s) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow T_{r-1}^{s-1*}(A_1,\dots,\hat{A}_i,\dots,A_r;B_1,\dots,\hat{B}_j,\dots,B_s)$$

De plus, si un argument A_i est un faisceau localement libre, alors on peut l'enlever à condition de remplacer l'un des A_j $(j \neq i)$ par $A_j \otimes A_i$, ou l'un des B_k par $B_k \otimes A_i^!$ (où $A_i^! = \underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}_X}(A_i , \underline{O}_X)$) , et on a une règle de calcul analogue dans le cas où l'un des arguments B_j est localement libre. En particulier, on peut toujours enlever un argument qui est identique à $\underline{O}_X$. Si tous les arguments sont localement libres, sauf au plus un des arguments B_i , la règle qu'on vient d'énoncer donne un isomorphisme fonctoriel

$$(8.5)\qquad T_r^{s*}(A_1,\dots,A_r ; B_1,\dots,B_s) = H^*(X,A_1^! \otimes \dots \otimes A_r^! \otimes B_1 \otimes \dots \otimes B_s)$$

(car on est ramené au cas où $r = 0$, $s = 1$, où cela est immédiat : on peut aussi utiliser directement la suite spectrale de terme initial (8.2)). Des opérations correspondant aux précédentes se définissent pour les $\underline{\underline{E}}_r^s$. Les relations entre les diverses opérations ainsi introduites sont les mêmes que pour les opérations analogues en calcul tensoriel.

Soit n la dimension de X . En appliquant successivement une composition tensorielle (8.3) et des contractions (8.4) sur les arguments répétés, on obtient un accouplement

$$(8.6)\qquad (T_r^s)^p(A_1,\dots;B_1,\dots) \times (T_s^r)^{n-p}(B_1,\dots;A_1,\dots,A_r \otimes \underline{\Omega}_X^n) \longrightarrow H^n(X, \underline{\Omega}_X^n)$$

THÉORÈME 6. - Si X est une variété projective non singulière, alors les accouplements (8.6) sont des dualités.

Cela résulte de façon purement formelle du corollaire au théorème 3. Il résulte en effet facilement de ce corollaire que si K est un complexe de faisceaux algébriques cohérents localement libres, alors l'hypercohomologie de X par rapport à K est en dualité avec l'hypercohomologie de X par rapport à $K' \otimes \underline{\Omega}_X^n$ par les accouplements naturels

$$(8.7)\qquad \underline{\underline{R}}^p\Gamma(K) \times \underline{\underline{R}}^{n-p}\Gamma(K' \otimes \underline{\Omega}_X^n) \to \underline{\underline{R}}^n\Gamma(\underline{\Omega}_X^n) = H^n(X , \underline{\Omega}_X^n)$$

On le voit en utilisant la suite spectrale de terme initial $H^p(H^q(X , K))$ et la suite spectrale analogue pour $K' \otimes \Omega_X^n$. Du résultat précédent, le théorème 6 se déduit en utilisant la définition (8.1).

REMARQUES.

1° Pour les définitions précédant le théorème 6, il n'était pas nécessaire que X soit non singulière, car il n'était pas indispensable de travailler seulement avec des résolutions finies. Mais si X est singulière on ne pourra plus affirmer, a priori, que les $(\underline{T}_r^s)^p(A_1 , \dots ; B_1 , \dots)$ soient des faisceaux cohérents, car dans le complexe de faisceaux

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}_X}(\underline{L}(A_1) \otimes \dots, \underline{L}(B_1) \otimes \dots)$$

il y aura une infinité de composantes de degré total donné.

2° On vérifie facilement que dans les formules (8.1), on peut remplacer un des $\underline{L}(B_i)$ par B_i. Compte tenu de la proposition 3, cela montre donc qu'on a

$$(8.8) \quad \begin{cases} \underline{T}_1^{1*}(A ; B) = \underline{\mathrm{Ext}}^*_{\underline{O}_X}(A , B) \\ T_1^{1*}(A ; B) = \mathrm{Ext}^*_{\underline{O}_X}(X ; A , B) \end{cases}$$

En particulier faisant dans (8.6) $r = s = 1$ et $A_1 = \underline{O}_X$, on retrouve le théorème 3. La formule (8.8) implique aussi $T_0^{1*}(B) = H^*(X , B)$, $T_1^{0*}(A) = \mathrm{Ext}^*_{\underline{O}_X}(X ; A , \underline{O}_X)$

3° On voit sur la formule (8.1) qu'en général les foncteurs $\underline{T}_r^{s*}$ et T_r^{s*} ont des composantes de degrés positifs et négatifs. Utilisant la remarque 2, on voit que si la dimension de X est n, alors les composantes non nulles de $\underline{T}_r^{s*}$ sont comprises entre $-(s-1)n$ et rn, si $s > 0$, entre 0 et rn, si $s = 0$, et les composantes non nulles de T_r^{s*} sont comprises entre $-(s-1)n$ et $(r+1)n$, si $s > 0$, entre 0 et $(r+1)n$, si $s = 0$, (et sauf erreur même, si $r > 0$, entre $-(s-1)n$ et rn, resp. entre 0 et rn).

BIBLIOGRAPHIE

[1] CARTIER (Pierre). - Les groupes $\mathrm{Ext}^s(A , B)$, Séminaire A. Grothendieck : Algèbre homologique, t. 1, 1957, n° 3.

[2] GROTHENDIECK (Alexandre). - Sur quelques points d'algèbre homologique, Tohoku math. J., t. 9, 1957, p. 119-183.

[3] SERRE (Jean-Pierre). - Faisceaux algébriques cohérents, Annals of Math., t. 61, 1955, p. 197-278.

[4] SERRE (Jean-Pierre). - Sur la dimension homologique des anneaux et des modules noethériens, Proc. Intern. Symp. on alg. number Theory [1955. Tokyo et Nikko]. - Tokyo, Science Council of Japan, 1956 ; p. 175-189.

ADDITIF

Les difficultés signalées dans la remarque de la page 13 sont actuellement complètement résolues, grâce à une extension des théorèmes de dualité à des variétés quelconques (à singularités arbitraires). Pour cette théorie, qui peut se formuler dans le cadre général de la "théorie des schémas", nous renvoyons aux "Eléments de Géométrie algébrique" de J. DIEUDONNÉ et A. GROTHENDIECK, actuellement en préparation. On trouvera quelques indications dans :

GROTHENDIECK (A.). - Cohomology theory of algebraic varieties, Congrès int. des Mathématiciens, 1958, Edinburgh (A paraître).

[Avril 1959]

GÉOMÉTRIE FORMELLE ET GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

par Alexander GROTHENDIECK

1. Schémas.

On sait qu'un espace algébrique affine défini sur un corps k est essentiellement déterminé par son algèbre affine A (anneau des fonctions régulières définies sur k), les morphismes d'espaces algébriques $X \longrightarrow Y$ correspondant biunivoquement aux homomorphismes de k-algèbres $A(Y) \longrightarrow A(X)$. L'algèbre affine correspondant à un espace algébrique est une k-algèbre de type fini et dans le point de vue "classique", elle n'a pas d'éléments nilpotents ; inversement, toute algèbre de ce type est obtenue comme algèbre affine d'un espace algébrique défini sur k . Il y a alors un dictionnaire connu permettant d'interpréter les situations concernant des espaces algébriques affines en termes d'algèbre commutative . On a constaté depuis longtemps qu'on obtenait alors des énoncés plus généraux, car il n'était généralement plus besoin de supposer que les anneaux en jeu étaient du type juste envisagé, l'hypothèse noethérienne étant le plus souvent suffisante. En particulier, qu'il y ait ou non un corps de base donné, il n'y avait pas lieu d'exclure le cas où ces anneaux contiennent des éléments nilpotents. Jusqu'à présent, les géomètres s'étaient refusés à tenir compte de ces indications et se sont obstinés à se restreindre à la considération d'algèbres affines sans éléments nilpotents, i.e. d'espaces algébriques dans les faisceaux structuraux desquels il n'y a pas d'éléments nilpotents (et même le plus souvent, des espaces algébriques "absolument irréductibles"). Le conférencier pense que cet état d'esprit a été un obstacle sérieux au développement des méthodes vraiment naturelles en Géométrie algébrique.

Soit A un anneau commutatif. Il est bien connu que l'ensemble $X = \mathrm{Spec}(A)$ des idéaux premiers de A est muni d'une topologie naturelle, la "topologie de Zariski" ou tppologie spectrale. D'autre part, il y a un faisceau d'anneaux commutatifs O_X sur X , dont la fibre en $\mathfrak{p} \in X$ est l'anneau localisé $A_{\mathfrak{p}}$, et dont l'anneau des sections s'identifie à A . Ainsi, X devient un espace annelé, appelé spectre premier de A . Un homomorphisme d'anneaux $f : A \longrightarrow B$ définit un morphisme d'espaces annelés $f' : \mathrm{Spec}(B) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A)$, l'application ensembliste sous-jacente n'étant autre que $\mathfrak{p} \longrightarrow f^{-1}(\mathfrak{p})$. Les homomorphismes d'espaces annelés de Spec(B) dans Spec(A) obtenus ~~de cette façon sont~~ exactement ceux pour lesquels les homomorphismes $O_x \longrightarrow O_y$ $(x = f'(y))$ sont locaux (i.e. l'image inverse de l'ideal maximal est l'idéal maximal).

On appelle schéma affine un espace annelé isomorphe à un Spec(A) , et préschéma un espace annelé localement affine, i.e. dont tout point a un voisinage ouvert qui est un schéma affine pour la structure induite. On définit de façon évidente les morphismes des préschémas ; localement ils correspondent à des homomorphismes d'anneaux.

Quand on se fixe un préschéma S , et qu'on regarde des morphismes de préschémas $X \longrightarrow S$, alors S joue le rôle d'un corps ou d'un anneau de base (ou mieux, d'un espace de base dans une fibration). On dit alors que X est un S-préschéma ; si S = Spec(A) , cela signifie aussi que O_X est un faisceau de A-algèbres. Ainsi, tout préschéma peut être regardé de façon unique comme un Z-préschéma. Bien entendu, les S-préschémas forment une catégorie, de plus on montre que dans cette catégorie le produit de deux objets X , Y existe toujours, il est noté $X \times_S Y$. Cette notion de produit permet de définir le changement de base dans un S-préschéma, correspondant à un morphisme $S' \longrightarrow S$: en effet, $X \times_S S'$ pourra être considéré comme un S'-préschéma.

On dit que X est séparé au-dessus de S si la diagonale de $X \times_S X$ est fermee. On appelle schéma un préschéma séparé au-dessus de Z ; il est alors séparé au-dessus de n'importe quoi. Pour simplifier, nous ne parlerons plus que de schémas, que de plus nous supposerons noethériens, i. e. réunions finies d'ouverts affines, spectres d'anneaux noéthériens. X est dit de type fini sur S, si pour tout ouvert affine U de S , son image inverse dans X est réunion finie d'ouverts affines dont les anneaux sont des algèbres de type fini sur l'anneau de U . Ce sont de tels S-schémas qui se prêtent à une étude proprement géometrique. En particulier, pour tout $s \in S$, la fibre $f^{-1}(s)$ de X au-dessus de s est un schéma algébrique sur le corps residuel $\kappa(s)$ de l'anneau local O_s de s dans S . Ainsi, X peut dans une certaine mesure être considéré comme une famille d'"espaces algébriques" $f^{-1}(s)$ le paramètre s parcourant S (i. e., du point de vue local, l'ensemble des idéaux premiers d'un anneau donné). Bien entendu, les $\kappa(s)$ peuvent avoir des caractéristiques différentes. Si S = Spec(k) , où k est un corps, on retrouve essentiellement la notion usuelle d'"espace algébrique", avec la seule différence que maintenant le faisceau structural peut avoir des éléments nilpotents.

En s'inspirant de notions bien connues, on définit la notion de morphisme projectif, et plus généralement de morphisme propre. Un tel morphisme est de type fini, de plus il transforme parties fermes en parties fermées, et garde cette propriété par changement de base quelconque.

X étant un schéma (noethérien, comme toujours) le faisceau O_X est un faisceau cohérent d'anneaux au sens de [2]. Les faisceaux cohérents de modules sur X sont donc aussi les faisceaux qui localement sont isomorphes à un conoyau d'un homomorphisme $O_X^m \longrightarrow O_X^n$.

2. Schémas formels.

Soient X un schéma, et X' une partie fermée de X. Alors il existe un sous-faisceau cohérent J de O_X tel que $X' = \operatorname{supp} O_X/J$ (et il en existe même un plus grand). Muni de O_X/J, X' devient un schéma, noté X_o ; un tel schéma est appelé "sous-schéma fermé de X". On peut aussi pour tout n considérer X' muni de O_X/J^{n+1}, noté X_n, c'est un sous-préschéma fermé de X dont l'ensemble sous-jacent est encore X', mais ayant un autre faisceau structural, soit $O_{X_n} = O_X/J^{n+1}$. Evidemment les O_{X_n} forment un système projectif de faisceaux d'anneaux sur X, dont la limite projective $\bar{O}_X$ est appelée complété formel de O_X le long de X'. Muni de ce faisceau d'anneaux, X' est appelé complété formel de X le long de X', c'est donc un espace annelé, mais pas un schéma en général. Pour tout faisceau cohérent F sur X, on peut considérer de même le complété formel $\bar{F} = \varprojlim_n F_n$ de F le long de X' (où $F_n = F \otimes_{O_X} O_X/J^{n+1}$), c'est un faisceau de modules sur $\bar{X}$. Ses sections s'appellent les "sections formelles de F le long de X'" et s'identifient aux éléments de $\varprojlim_n \Gamma(X', F_n)$. Pour $F = O_X$, on trouve les "fonctions holomorphes" de X le long de X' au sens de ZARISKI, (dont nous ne suivrons pas la terminologie à cause de ces interférences avec la terminologie classique).

On appelle schéma formel (sous-entendu : noethérien) un espace topologique $\mathfrak{X}$, muni d'un faisceau d'anneaux topologiques $O_{\mathfrak{X}}$ satisfaisant à la condition suivante : on a un isomorphisme de faisceaux d'anneaux topologiques $O_{\mathfrak{X}} = \varprojlim_n O_n$, où les O_n forment un système projectif de faisceaux d'anneaux sur $\mathfrak{X}$, faisant chacun de $\mathfrak{X}$ un schéma $\mathfrak{X}_n$, et tel que pour $m \geqslant n$, l'homomorphisme $O_m \longrightarrow O_n$ soit surjectif et ait pour noyau J_m^{n+1}, où J_m est le noyau de $O_m \longrightarrow O_o$. On montre alors que $O_{\mathfrak{X}}$ est un faisceau cohérent d'anneaux locaux noethériens.

En vertu des définitions, un complété formel $\hat{X}$ comme plus haut est un schéma formel, et inversement, tout schéma formel est localement de ce type. En fait, la donnée d'un schéma formel affine (i. e. tel que $\mathfrak{X}_o$ soit affine, ce qui implique que tous les $\mathfrak{X}_n$ le sont) est équivalente à la donnée d'un anneau topologique noéthérien, J-adique séparé et complet.

Les définitions habituelles : morphisme, morphisme de type fini, morphisme propre, etc., pour les schémas ordinaires, s'étendent sans difficulté aux schémas formels.

3. Les trois théorèmes fondamentaux.

Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme propre de schémas (noethériens comme toujours), soient Y' une partie fermée de Y , X' son image inverse dans X , considérons les complétés formels $\hat{Y}$, $\hat{X}$ correspondants. Alors f induit un morphisme $\hat{f} : \hat{X} \longrightarrow \hat{Y}$ de schémas formels, qui est d'ailleurs propre. Soit F un faisceau cohérent sur X , alors $\hat{F}$ est un faisceau cohérent sur $\hat{X}$. Dans le théorème 1 , on oublie X , Y , F et on ne regarde que le morphisme propre $\hat{f}$ de schémas formels, et le faisceau cohérent $\hat{F}$ sur $\hat{X}$. (Cependant, le conférencier n'a écrit de démonstration complète que dans le cas où on part de X , Y , f , F) .

THÉORÈME 1 (théorème de finitude).

i. Les $R^q\hat{f}_*(\hat{F})$ sont des faisceaux cohérents sur $\hat{Y}$.

ii. Les homomorphismes naturels

$$R^q \hat{f}_*(\hat{F}) \longrightarrow \varprojlim_n R^q f_{n*}(F_n)$$

sont des isomorphismes.

Dans cet énoncé, on suppose choisi un sous-faisceau cohérent J de O_Y définissant Y' , d'où par image réciproque un sous-faisceau cohérent de O_X définissant X' , d'où par suite la définition des F_n , X_n , Y_n et $f_n : X_n \to Y_n$ comme au n° 2 . Les changements mineurs à faire dans l'explicitation de ces notations sont évidents, si on partait d'un morphisme propre quelconque de deux schémas formels.

Le théorème 1 ne concernait que la "cohomologie formelle". Le théorème suivant la met en rapport avec la "cohomologie algébrique", et s'apparente à un théorème bien connu de SERRE [4] sur la comparaison entre cohomologie algébrique et cohomologie analytique.

THÉORÈME 2 (Premier théorème de comparaison). - Les $R^q f_*(F)$ sont des faisceaux cohérents sur Y (ce qui est un cas particulier du théorème 1), et les homomorphismes naturels

$$\overline{R^q f_*(F)} \longrightarrow \varprojlim_n R^q f_{n*}(F_n)$$

sont des isomorphismes.

COROLLAIRE 1. - On a des isomorphismes canoniques : $\overline{R^q f_*(F)} = R^q \bar{f}_*(\bar{F})$.

Ce corollaire est, pour $q = 0$, une généralisation du "théorème fondamental des fonctions holomorphes" de Zariski, dont nous déduirons une généralisation du "théorème de connexion" de Zariski. Notons d'ailleurs que, alors que le théorème 1 (ii) est trivial pour $q = 0$, il n'en est plus du tout de même pour le théorème 2 ou pour sa formulation équivalente (corollaire 1). En fait, la démonstration procède par récurrence descendante sur q (étant trivial pour q grand, car alors les deux membres sont nuls), et le cas $q = 0$ apparaît donc comme le dernier pas de la récurrence, donc si on peut dire le cas "le plus difficile".

COROLLAIRE 2. - Supposons $Y = \mathrm{Spec}(A)$, Y' étant défini par l'idéal J de A . Alors pour tout faisceau cohérent F sur X , les $H^q(X , F)$ sont des A-modules de type fini, dont les complétés J-adiques sont les $H^q(\bar{X} , \bar{F})$.

Appliquant enfin ce corollaire à $H = \underset{\sim}{\mathrm{Hom}}_{O_X}(F , G)$, on trouve :

COROLLAIRE 3. - Supposons $Y = \mathrm{Spec}(A)$, Y' étant défini par l'idéal J de A . Soient F , G deux faisceaux cohérents sur X , alors $\mathrm{Hom}(F , G)$ est un module de type fini sur A , dont le complété J-adique s'identifie à $\mathrm{Hom}(\bar{F} , \bar{G})$.

Bien entendu, l'application naturelle $\mathrm{Hom}(F , G) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\bar{F} , \bar{G})$ est celle qui associe à un homomorphisme $u : F \longrightarrow G$ son prolongement "par continuité" $\bar{u} : \bar{F} \longrightarrow \bar{G}$ (moyennant quoi $\bar{F}$ devient un foncteur en F) .

Supposons maintenant que A soit séparé et complet pour sa topologie J-adique, alors les corollaires 2 et 3 précédents donnent :

$$H^q(X , F) = H^q(\bar{X} , \bar{F}) , \qquad \mathrm{Hom}(F , G) = \mathrm{Hom}(\bar{F} , \bar{G}) .$$

Cette dernière identité montre que la catégorie des faisceaux cohérents sur X s'identifie à une sous-catégorie (avec comme morphismes les morphismes induits) de la catégorie des faisceaux cohérents sur $\bar{X}$. En fait, on a même :

THÉORÈME 3. - Pour qu'un faisceau de modules sur $\bar{X}$ soit cohérent, il faut et il suffit qu'il soit isomorphe à un faisceau de la forme $\bar{F}$, où F est un faisceau cohérent sur X (déterminé à un isomorphisme canonique près en vertu du théorème 2, corollaire 3).[On rappelle que maintenant $Y = \mathrm{Spec}(A)$, A étant un anneau topologique noethérien J-adique séparé et complet].

COROLLAIRE 1. - Les sous-schémas fermés de X correspondent biunivoquement aux sous-schémas formels fermes de $\bar{X}$.

En effet, ils correspondent aux sous-faisceaux cohérents de O_X resp. de $O_{\bar{X}}$. Regardant les graphes de morphismes comme des sous-schémas fermés, on déduit du corollaire 1 :

COROLLAIRE 2. - Soient X , Z deux schémas propres au-dessus de A , (anneau noethérien J-adique, séparé et complet). Alors l'application $g \longrightarrow \bar{g}$ définit une correspondance biunivoque entre les Y-morphismes de X dans Z , et les $\bar{Y}$-morphismes de $\bar{X}$ dans $\bar{Z}$.

En d'autres termes, les schémas algébriques propres sur A apparaissent comme une sous-catégorie (avec comme morphismes les morphismes induits) de la catégorie des schémas formels propres sur $\bar{Y}$. On fera attention cependant qu'il existe des schémas formels propres sur $\bar{Y}$ qui ne sont pas "algébrisables", i. e. isomorphes à un $\bar{X}$, avec X propre sur A (tout comme il existe des variétés analytiques complexes compactes qui ne proviennent pas de variétés algébriques définies sur le corps des complexes). De tels schémas formels s'introduisent de façon naturelle en "théorie des modules". Notons cependant un cas particulier intéressant où un schéma formel est algébrisable :

THÉORÈME 4. - Soit A un anneau noethérien local complet de corps résiduel k , et soit $\mathfrak{X}$ un schéma formel propre sur A (muni de sa topologie $\mathfrak{r}(A)$-adique). On suppose

i. que les anneaux locaux de $O_{\mathfrak{X}}$ sont des modules plats sur A , ou ce qui revient au même, si on munit $O_{\mathfrak{X}}$ et A de la filtration définie par les puissances de l'idéal maximal de A , on a pour les gradués associés la relation $\mathrm{gr}(O_{\mathfrak{X}}) \simeq \mathrm{gr}^{o}(O_{\mathfrak{X}}) \otimes_k \mathrm{gr}(A)$.

ii. Considérant $\mathfrak{X}_o = \mathfrak{X} \otimes_A k$ comme un schéma algébrique sur k , on a

$H^2(\mathfrak{X}_0 , O_{\mathfrak{X}_0}) = 0$.

iii. $\mathfrak{X}_0$ est projectif .

Sous ces conditions, $\mathfrak{X}$ est algébrisable, et de façon précise est isomorphe à $\hat{X}$, où X est un A-schéma projectif.

Les conditions (ii) et (iii) seront vérifiées en particulier si $\mathfrak{X}_0$ est une courbe simple sur k , et le théorème 4 pourra s'appliquer en particulier dans la "théorie des modules" pour les courbes de genre donné ... Indiquons comment on démontre le théorème 4 : on montre (cf. proposition 3 plus bas) que (i) et (ii) impliquent que tout faisceau cohérent sur $\mathfrak{X}_0$, localement isomorphe au faisceau fondamental, s'obtient par réduction à partir d'un faisceau de même nature sur $\mathfrak{X}$. Partant alors d'un faisceau "ample" sur $\mathfrak{X}_0$ (il en existe d'après (iii)) on le remonte en un faisceau inversible sur $\mathfrak{X}$, et utilisant le théorème 1 on prouve qu'un multiple de ce dernier définit une immersion de X dans le complété formel d'un schéma P_A^r ("projectif type" de dim r au-dessus de A) .

Pour la démonstration des théorèmes 1 à 3 , on se reportera à [1] .

4. Application au théorème de connexion et au "Main theorem" de Zariski.

Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme propre de schémas, alors d'après le théorème de finitude $f_*(O_X) = \underset{\sim}{A}$ est un faisceau cohérent sur Y , c'est d'ailleurs un faisceau d'algèbres commutatives, donc il correspond à un Y-schéma $g : Y' \longrightarrow Y$ fini au-dessus de Y (défini par la condition d'être affine au-dessus de Y , i. e. l'image inverse d'un ouvert affine est affine, et que $g_*(O_{Y'}) = \underset{\sim}{A}$). Il est immédiat que f se factorise alors canoniquement en $f = gf'$, où $f' : X \longrightarrow Y'$ est un morphisme de X dans Y qui cette fois-ci est tel que $f'_*(O_X) = O_{Y'}$. Cette factorisation de f est appelée la factorisation de Stein de f . Appliquant le premier théorème de comparaison, corollaire 1, à f' et à la partie de Y' réduite à un point y' on trouve que $f'^{-1}(y') = X'$ est connexe (autrement, les sections formelles de X le long de X' ne formeraient pas un anneau local, or le complété de $f'_*(O_X)_{y'} = O_{y'}$ est local !) . On a prouvé :

THÉORÈME 5 ("Théorème de connexion" de Zariski). - Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme propre, alors f se factorise de façon unique (à un isomorphisme près) en $f = gf'$, où $g : Y' \longrightarrow Y$ est fini et $f' : X \longrightarrow Y'$ est tel que $f'_*(O_X) = O_{Y'}$ (d'où $g_*(O_{Y'}) = f_*(O_X)$) . Les fibres de f' sont connexes,

i. e. l'ensemble des composantes connexes d'une fibre $f^{-1}(y)$ de f est en correspondance biunivoque avec l'ensemble des points de Y' au-dessus de y, i. e. l'ensemble des idéaux maximaux dans $f_*(\mathcal{O}_X)_y$.

On en déduit immédiatement les variantes habituelles du théorème de connexion. Notons ici seulement le

COROLLAIRE 1. - *Pour qu'un point x de X soit isolé dans sa fibre $f^{-1}(y)$ il faut et il suffit que la fibre $f'^{-1}(y')$ (où $y' = f'(x)$) soit réduite à x, ou encore que f' induise un isomorphisme d'un voisinage de x sur un voisinage de y'. L'ensemble de ces points est un ouvert U, et f' induit un isomorphisme de U sur un ouvert de Y'.*

Pour montrer que f' est un isomorphisme local en x, on note que f' induit un isomorphisme $\mathcal{O}_{y'} \longrightarrow \mathcal{O}_x$, comme on voit grâce à $f'(\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_{Y'}$, et au fait que ($f'$ étant une application fermée dont la fibre en y' est réduite à x) les $f'^{-1}(V)$ parcourent un système fondamental de voisinages de x quand V parcourt un système fondamental de voisinages de y'. On en déduit aussitôt le résultat suivant, dû à CHEVALLEY dans le cas "géométrique".

COROLLAIRE 2. - *Pour que f soit un morphisme fini, il faut et il suffit qu'il soit propre et que ses fibres soient finies.*

S'il en est ainsi, f' est en effet un isomorphisme d'après ce qui précède.

Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme non nécessairement propre, mais supposons que X soit contenu comme ouvert dans un Y-schéma propre $\bar{f} : \bar{X} \longrightarrow Y$ (ce qui sera le cas en particulier si f est quasi-projectif). Appliquant le corollaire 1, on voit que $\bar{f}'$ induit un isomorphisme de l'ensemble U des points de X isolés dans leur fibre sur un ouvert de Y' (et que U est bien ouvert). On en déduit la variante globale suivante du "Main Theorem" de Zariski.

THÉORÈME 6 ("Main Theorem" de Zariski). - *Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de type fini. Alors l'ensemble U des points de X qui sont isolés dans leur fibre est ouvert, et si f est quasi-projectif, U est Y-isomorphe à une partie ouverte d'un schéma Y' fini au-dessus de Y.*

Comme un morphisme de type fini est localement affine, et *a fortiori* localement quasi-projectif, on déduit aussitôt du théorème 6 les variantes usuelles locales du Main Theorem.

5. Application à l'étude cohomologique des morphismes propres et plats.

Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme propre, soit F un faisceau cohérent sur X,

F étant supposé Y-plat, i. e. les F_x sont des modules plats sur les anneaux O_y $(y = f(x))$. Cela signifie aussi que pour tout $y \in Y$, si nous filtrons F le long de la fibre $f^{-1}(y)$ par les $\mathfrak{m}_y^n F$, ($\mathfrak{m}_y$ étant l'idéal maximal de O_y) le gradué associé est isomorphe à $(F/\mathfrak{m}_y F) \otimes_{\mathcal{K}(y)} gr(O_y)$, en d'autres termes on a

$$\mathfrak{m}_y^n F/\mathfrak{m}_y^{n+1} F = F_y \otimes_{\mathcal{K}(y)} (\mathfrak{m}_y^n/\mathfrak{m}_y^{n+1})$$

pour tout entier n, où X_y désigne la fibre $f^{-1}(y)$ considérée comme schéma propre au-dessus du corps résiduel $\mathcal{K}(y)$ de y, et F_y le faisceau $F/\mathfrak{m}_y F$ induit par F sur X_y. Tenant compte de cet isomorphisme et du théorème 2, on arrive à des majorations et parfois des computations des $R^q f_*(F)$ au voisinage de y, connaissant la cohomologie de X_y à coefficients dans F_y. Le théorème 2 prend ici la forme

$$\overline{R^q f_*(F)_y} = \varprojlim_n H^q(F_y, F/\mathfrak{m}_y^n F)$$

Nous allons en signaler seulement la conséquence suivante :

PROPOSITION 1. - <u>Soient</u> $f : X \longrightarrow Y$ <u>un morphisme propre,</u> F <u>un faisceau sur</u> X <u>cohérent et</u> Y<u>-plat. Soit</u> $y \in Y$, <u>soit</u> q <u>un entier, et supposons que</u> $H^q(X_y, F_y) = 0$. <u>Alors</u> $R^q f_*(F)$ <u>est nul au voisinage de</u> y, <u>et pour tout</u> n, <u>l'homomorphisme naturel</u> $R^{q-1} f_*(F)_y \rightarrow H^{q-1}(X_y, F_y/\mathfrak{m}_y^n F_y)$ <u>est surjectif</u>.

En particulier, si f est un morphisme plat (i. e. O_X est Y-plat) alors tout faisceau cohérent localement libre F sur X est Y-plat. Soient F, G deux tels faisceaux, appliquons la proposition1 à $\underline{Hom}_{O_X}(F, G)$ et à $q = 1$, on trouve :

THÉORÈME 7. - <u>Soit</u> f <u>un morphisme propre et plat, soient</u> F, G <u>deux faisceaux cohérents localement libres sur</u> X, <u>soit</u> $y \in Y$ <u>et supposons que</u> $H^1(X_y, \underline{Hom}_{O_X}(F_y, G_y)) = 0$, <u>alors tout homomorphisme</u> $u_o : F_y \longrightarrow G_y$ <u>est induit par un homomorphisme</u> $u : F|V \longrightarrow G|V$, où $V = f^{-1}(U)$ <u>est l'image inverse d'un voisinage</u> U <u>de</u> y.

COROLLAIRE. - <u>Si</u> u_o <u>est un isomorphisme</u> (resp. un monomorphisme, un épimorphisme) <u>alors il en est de même de</u> u, <u>pour</u> U <u>assez petit.</u>

En particulier :

COROLLAIRE 2. - *Soit* E_o *un faisceau cohérent localement libre sur* X_y *tel que* $H^1(X_y\ ;\ \underset{\sim}{Hom}_{O_X}(E_o\ ,\ E_o)) = 0$, *alors deux faisceaux localement libres dont des restrictions à* X_y *sont isomorphes à* E_o , *sont isomorphes dans un voisinage de* X_y.

Ainsi :

COROLLAIRE 3. - *Supposons* $H^1(X_y\ ,\ O_{X_y}) = 0$. *Alors deux faisceaux inversibles sur* X (i. e. localement isomorphes à O_X) *dont les restrictions à* X_y *sont isomorphes, sont isomorphes*.

On en déduit :

PROPOSITION 2. - *Soient* Y *un schéma connexe,* E *un faisceau cohérent localement libre sur* Y , *considérons le fibré en espaces projectifs* $X = P(E)$ *associé à* E , *muni de son faisceau inversible bien connu* $O_X(1)$. *Alors tout faisceau inversible* L *sur* X *est isomorphe à un faisceau de la forme* $f^*(L') \otimes O_X(n)$, *où* L' *est un faisceau inversible sur* Y *et* n *un entier. Ce dernier est déterminé de façon unique, et* L' *est déterminé à un isomorphisme près.*

La corollaire 3 précédent prouve que L est isomorphe à un $O_X(n)$ au voisinage de chaque fibre. Le reste est à peu près formel.

La proposition 2 permet de déterminer les Y-morphismes de $X = P(E)$ dans un autre fibré projectif. On trouve en particulier :

COROLLAIRE. - *Soit* u *un automorphisme de* $X = P(E)$. *Alors il existe un faisceau inversible* L' *sur* Y *et un isomorphisme* v *de* E *sur* $E \otimes L'$ *tel que* u *soit l'isomorphisme correspondant* $P(E) \xrightarrow{\sim} P(E \otimes L') = P(E)$; *le couple* $(v\ ,\ L')$ *est déterminé à un isomorphisme près.*

Soit Γ l'ensemble des classes de fibrés inversibles L' sur Y tels que $E \otimes L'$ soit isomorphe à E. Les éléments sont de torsion, car si n est le rang de E , on voit (en prenant les puissances extérieures n-ièmes) que l'on doit avoir $L'^{\otimes n} \simeq O_Y$. Le corollaire peut alors s'exprimer en disant qu'on a une suite exacte de groupes.

$$e \longrightarrow \mathrm{Aut}(E)/\Gamma(Y\ ,\ O_Y^*) \longrightarrow \mathrm{Aut}_Y(X) \longrightarrow \Gamma \longrightarrow e$$

(d'ailleurs déduite de la suite exacte de cohomologie déduite de la suite exacte suivante de *faisceaux* de groupes

$$e \longrightarrow O_X^* \longrightarrow \underset{\sim}{Aut}(E) \longrightarrow \underset{\sim}{Aut}_Y(X) \longrightarrow e$$

où O_X^* est le faisceau des "unités" de O_X, identifié au centre de $\underset{\sim}{Aut}(E))$.

6. Application à des théorèmes d'existence et d'unicité pour des faisceaux et schémas sur un anneau J-adique complet.

Le théorème 7 donnait un résultat d'unicité sur des faisceaux cohérents localement libres, en utilisant les théorèmes 1 et 2. Utilisant le théorème 3, nous déduisons maintenant des théorèmes d'existence de faisceaux, de morphismes de schémas, ou de schémas. Dans la suite, A désigne un anneau noethérien local, séparé et complet. La méthode générale consiste toujours à faire des constructions formelles, ce qui consiste essentiellement à faire de la géométrie algébrique sur un anneau artinien, et à en tirer des conclusions de nature "algébrique" en utilisant les trois théorèmes fondamentaux.

PROPOSITION 3. - Soit $\mathfrak{X}$ un schéma formel propre et plat au-dessus de A, soit F_o un faisceau localement libre sur X_o tel que $H^2(X_o, \underset{\sim}{Hom}_{O_{X_o}}(F_o, F_o)) = 0$ Alors il existe un faisceau localement libre F sur $\mathfrak{X}$ qui induit sur X_o un faisceau isomorphe à F_o. (Cet F est d'ailleurs unique à **un isomorphisme** près si $H^1(X_o, \underset{\sim}{Hom}_{O_{X_o}}(F_o, F_o)) = 0$).

On construit de proche en proche des faisceaux localement libres F_n sur les X_n, s'induisant l'un l'autre. La construction de F_n rencontre une obstruction dans $H^2(X_o, \underset{\sim}{Hom}_{O_{X_o}}(F_o, F_o)) \otimes_{A/J} (J^n/J^{n+1})$, qui est donc nulle par hypothèse. Utilisant maintenant le théorème 3, on trouve :

COROLLAIRE 1. - Soit X un schéma propre et plat au-dessus de A, et soit F_o comme ci-dessus. Alors il existe un faisceau localement libre F sur X induisant sur X_o un faisceau isomorphe à F_o. Cet F d'ailleurs unique à un isomorphisme près si $H^1(X_o, \underset{\sim}{Hom}_{O_{X_o}}(F_o, F_o)) = 0$.

Soit X_o un schéma de type fini sur le corps k, on suppose X_o simple (par quoi nous entendons absolument simple) sur k, mais pas nécessairement propre sur k. Soit A un anneau artinien local de corps résiduel k. Nous nous intéressons à trouver les schémas X plats sur A, tels que $X \otimes_A k = X_o$ (c'est le point de départ de la "théorie des modules" ou des "variations de structure" de X_o). Il revient au même de se donner un tel X, ou sur l'espace topologique X_o un faisceau O_X muni des structures suivantes :

i. C'est un faisceau de A-algèbres.

ii. Il est muni d'un homomorphisme d'augmentation $O_X \longrightarrow O_{X_o}$, (compatible avec les structures de A-algèbres); ces données étant assujetties aux conditions suivantes : l'augmentation induit un isomorphisme $O_X \otimes_A k \xrightarrow{\sim} O_{X_o}$; O_X est plat sur A, i. e. le gradué associé à O_X filtré par les puissances de l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A est isomorphe à $\mathrm{gr}^o(O_X) \otimes_k \mathrm{gr}(A)$, i. e. on a des isomorphismes $\mathfrak{m}^n O_X / \mathfrak{m}^{n+1} O_X = O_{X_o} \otimes_k (\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1})$. Le fait fondamental est le suivant :

THÉORÈME 8. - Soit X_o un schéma de type fini et simple sur le corps k, supposons X_o affine. Soit A un anneau local artinien de corps résiduel k, alors il existe un A-schéma X plat sur A tel que $X \otimes_A k = X_o$, et deux tels schémas sont nécessairement isomorphes.

Notons que l'isomorphisme en question n'est pas canonique, car X aura en général des A-automorphismes non triviaux induisant l'identité sur X_o. D'autre part, il n'y a pas en général de choix "canonique" d'un X satisfaisant les conditions données, sauf dans le cas ou A est une k-algèbre, (cas d'égales caractéristiques) où on peut prendre $X = X_o \otimes_k A$, i. e. $O_X = O_{X_o} \otimes_k A$ (que X_o soit affine ou non d'ailleurs). Dans le cas d'inégales caractéristiques, j'ignore en général, quand X_o n'est pas affine, si on peut "remonter" X_o en un X défini sur X. Cependant, soit n un entier > 0, posons $A_{n-1} = A/\mathfrak{m}^n$, et supposons qu'on ait remonté X_o en un A_{n-1}-schéma plat X_{n-1}, on se propose de remonter X_{n-1} en un A_n-schéma plat X_n. On sait déjà en vertu du théorème 8 que c'est possible localement, d'autre part on vérifie facilement que, si U_n remonte un ouvert U_{n-1} de X_{n-1}, alors le faisceau des groupes d'automorphismes de U_n (induisant l'identité sur U_{n-1}) est canoniquement isomorphe à $\mathfrak{G}_{X_o/k} \otimes_k \mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}$ restreint à U_{n-1}, et en particulier est commutatif ($\mathfrak{G}_{X_o/k}$ désignant le faisceau des germes de k-dérivations sur X_o). Il s'ensuit facilement que l'on a une obstruction à construire X_n remontant X_{n-1}, qui se trouve dans $H^2(X_o, \mathfrak{G}_{X_o/k}) \otimes \mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}$. Par suite :

COROLLAIRE 1. - Soit X_o un schéma de type fini simple sur k, supposons

$H^2(X_o, \mathfrak{G}_{X_o/k}) = 0$. Alors pour tout anneau local artinien A de corps résiduel k il existe un A-schéma plat X tel que $X \otimes_A k = X_o$.

D'ailleurs, si on a pu trouver un X plat sur A remontant X_o , alors en vertu du théorème 8, l'ensemble des classes (à un isomorphisme près) de A-schémas plats qui remontent X_o s'identifie à $H^1(X_o, \underset{\sim}{\mathrm{Aut}}(X))$, où bien entendu $\underset{\sim}{\mathrm{Aut}}(X)$ désigne le faisceau des germes d'automorphismes du faisceau de A-algèbres O_X compatibles avec l'augmentation. La filtration de O_X définit une filtration de $\underset{\sim}{\mathrm{Aut}}(X)$, le quotient de ce faisceau par le n-ième sous-groupe de la filtration étant $\underset{\sim}{\mathrm{Aut}}(X_n)$; le gradué associé à cette filtration est commutatif, et s'identifie à $\mathfrak{G}_{X_o/k} \otimes_k \mathrm{gr}(A)$. En particulier, si $\mathfrak{m}^{n+1}$ est la première puissance de $\mathfrak{m}$ qui est nulle, alors $F^n(\underset{\sim}{\mathrm{Aut}}(X))$ (le dernier cran de la filtration) est dans le centre de $\underset{\sim}{\mathrm{Aut}}(X)$ et isomorphe à $\mathfrak{G}_{X_o/k} \otimes_k \mathfrak{m}^n$; c'est aussi le faisceau des germes d'automorphismes de X qui induisent l'identité sur $X_{n-1} = X \otimes_A A/\mathfrak{m}^n$. Utilisant ces résultats, on obtient aussitôt les énoncés suivants :

COROLLAIRE 2. - Soit X_o un schéma de type fini simple sur k , soit A un anneau local artinien de corps résiduel k et d'idéal maximal $\mathfrak{m}$, on suppose $\mathfrak{m}^{n+1} = 0$, soit $A_{n-1} = A/\mathfrak{m}^n$, et enfin soit X_{n-1} un A_{n-1}-schéma plat tel que $X_{n-1} \otimes_A k = X_o$. Alors l'ensemble des classes (à un isomorphisme près induisant l'identité sur X_{n-1}) de A-schémas plats X_n tels que $X \otimes_A A_{n-1} = X_{n-1}$ est vide, ou est un espace principal homogène sous $H^1(X_o, \mathfrak{G}_{X_o/k}) \otimes_k \mathfrak{m}^n$.

(Noter que en général, il n'y a pas d'élément origine privilégié dans de dernier espace, car il n'y a pas de façon privilégiée de remonter X_{n-1} en X_n).

COROLLAIRE 3. - Soit X_o un schéma de type fini simple sur k , et supposons $H^1(X_o, \mathfrak{G}_{X_o/k}) = 0$. Alors pour tout anneau local artinien A de corps résiduel k , il existe au plus (à un isomorphisme près) un A-schéma plat X tel que $X \otimes_A k = X_o$.

Les corollaires 1 et 3 impliquent immédiatement les énoncés, en apparence plus généraux, obtenus en y supposant seulement que A est un anneau local noethérien complet de corps résiduel k , pourvu qu'on y introduise X comme un schéma formel sur A :

THÉORÈME 9. - Soient k un corps, X_o un schéma de type fini simple sur k , Pour tout anneau local noethérien complet A de corps résiduel k , soit $F(A)$ l'ensemble des classes (à un isomorphisme près induisant l'identité sur X_o)

de schémas formels $\mathfrak{X}$ sur A, de type fini et plats sur A, tels que $X \otimes_A k = X_0$. Avec ces notations :

i. Si $H^1(X_0, \mathcal{G}_{X_0/k}) = 0$, alors pour tout A, $F(A)$ a au plus un élément.

ii. Si $H^2(X_0, \mathcal{G}_{X_0/k}) = 0$, alors pour tout A, $F(A)$ a au moins un élément.

COROLLAIRE 1. - Supposons X_0 propre sur k. Sous la condition (i), pour tout A, il existe au plus (à un isomorphisme près induisant l'identité sur X_0) un schéma X propre et plat sur A, tel que $X \otimes_A k = X_0$.

On utilise le théorème 3, corollaire 2. Par exemple :

COROLLAIRE 2. - Si X est un schéma propre et plat sur A tel que $X \otimes_A k$ soit isomorphe au schéma projectif type $\mathbb{P}^r_k$ de dimension r sur k, alors X est isomorphe à $\mathbb{P}^r_A$.

(On peut aussi déduire ce résultat de la proposition 3, corollaire 1).

COROLLAIRE 3. - Soit X_0 un schéma simple et projectif sur k, supposons que l'on ait

$$H^2(X_0, \mathcal{O}_{X_0}) = H^2(X_0, \mathcal{G}_{X_0/k}) = 0 .$$

Alors pour tout A, il existe un schéma projectif et plat X sur A, tel que $X \otimes_A k = X_0$.

On conjugue le théorème 9(ii) et le théorème 4. En particulier :

COROLLAIRE 4. - Soit X_0 le schéma d'une courbe algébrique complète et simple sur k. Alors pour tout anneau local noethérien complet A de corps résiduel k, il existe un "schéma de courbe simple" X sur A, tel que $X \otimes_A k = X_0$.

REMARQUES.

1) Les corollaires 3 et 4 sont surtout intéressants si k est de caractéristique $p \neq 0$, en prenant pour A un anneau de valuation discrète de caractéristique 0, de corps résiduel k ; par exemple le "plus petit A possible", savoir celui pour lequel p engendre l'idéal maximal. (En fait, à cause des théorèmes de Cohen, il suffit de connaître les corollaires 3 et 4 pour un tel anneau A). Signalons à ce propos que, selon les spécialistes, on ne sait pas s'il existe des schémas sur un corps k qui ne sont pas réduction mod p d'un schéma plat défini sur un tel anneau A. Du moins les résultats de ce numéro donnent-ils un moyen d'investigation systématique de cette question. Il faudrait commencer

par regarder si la première obstruction qu'on a dans $H^2(X_o, \mathcal{C}_{X_o/k})$ est nécessairement nulle.

2) On notera que le théorème 3 , et la technique correspondante, n'est valable que pour un anneau de base (local pour fixer les idées) complet.

Pour passer de résultats connus pour le complété d'un anneau local à des résultats correspondants pour cet anneau local lui-même, il faudrait un quatrième "théorème fondamental", dont l'énoncé définitif reste à trouver.

3) On comparera les résultats de ce numéro (notamment les corollaires 1 et 2 précédents) et du suivant, avec les résultats de Kodaira-Spencer sur la variation des structures complexes. Utilisant le théorème conjectural auquel il vient d'être fait allusion, on devrait pouvoir conclure, sous les conditions du corollaire 1, mais où A ne serait plus supposé complet, qu'il existe un anneau A' contenant A , fini et non ramifié sur A , tel que $X \otimes_A A'$ et $X' \otimes_A A'$ soient A'-isomorphes, (X , X' étant deux A-schémas propres et plats donnés, tels que $X \otimes_A k = X' \otimes_A k = X_o$) . C'est ce qu'on peut prouver du moins quand $X_o = \mathbb{P}^r_k$, en utilisant le corollaire à la proposition 2 . En tout cas, lorsque $H^1(X_o, \mathcal{C}_{X_o/k})=0$, on peut prouver que les fibres de X , X' au-dessus de tout point y de $Y = \mathrm{Spec}(A)$ sont isomorphes, du moins quand on passe à la clôture algébrique du corps résiduel $\mathcal{K}(y)$. (On a un résultat local, plus fort en apparence, en ne supposant plus nécessairement A local). En ce qui concerne les "variations de structure" pour l'espace projectif, signalons encore la question suivante, suggérée par un problème correspondant de Kodaira-Spencer. Soit X un schéma propre et plat au-dessus de l'anneau local intègre A de corps des fractions K , de corps résiduel k , supposons que $X \otimes_A K$ soit isomorphe à $\mathbb{P}^r_K$, est-il vrai que $X \otimes_A k = X_o$ est isomorphe à $\mathbb{P}^r_k$ (du moins sur la clôture algébrique de k) ? Dans ce problème, on peut supposer que A est un anneau de valuation discrète complet. On a un problème analogue quand X_o est une variété abélienne.

7. Application à la "Théorie des modules".

Le conférencier venant seulement lui-même d'aborder cette théorie, nous serons obligés de nous limiter à quelques indications. Pour simplifier, nous nous plaçons sur un corps k , i. e. nous travaillons en égale caractéristique, bien que le théorème 8 permette aussi de traiter le cas général, sans changement essentiel, semble-t-il. Nous n'avons pas dépassé actuellement le stade "formel", cependant le conférencier espère pouvoir construire à partir de là des schémas de modules véritables dans certains cas, et en particulier construire pour tout entier g un schéma sur les entiers, jouant le rôle d'un schéma des modules universel pour les courbes simples de genre g .

Reprenons la situation et les notations du théorème 9 , en supposant maintenant que A est une algèbre locale de rang fini sur k , supposé algébriquement clos pour simplifier. Alors $F(A)$ peut être regardé comme un foncteur covariant de A , à valeurs dans la catégorie des ensembles, un homomorphisme de k-algèbres $A \longrightarrow B$ définissant une application $F(A) \longrightarrow F(B)$, puisque tout A-schéma plat X tel que $X \otimes_A k = X_o$ donne naissance à un B-schéma $X \otimes_A B$ ayant les mêmes propriétés. Supposons qu'on puisse trouver une k-algèbre locale complète noethérienne $\mathcal{O}$, et un isomorphisme fonctoricl

$$(*) \qquad \mathrm{Hom}(\mathcal{O}, A) \xrightarrow{\sim} F(A)$$

(où le premier membre désigne les homomorphismes de k-algèbres). On voit facilement qu'un tel $\mathcal{O}$ est déterminé à un isomorphisme canonique près, on appelle alors le spectre formel $\mathcal{Y}$ de $\mathcal{O}$ (i. e. l'espace topologique réduit à un point muni d'un faisceau d'anneaux topologiques réduit à $\mathcal{O}$) le schéma formel des modules pour X_o . (Notons qu'il n'existe pas nécessairement). Soit $\mathfrak{r}$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}$, pour tout n soit $O_n = \mathcal{O}/\mathfrak{r}^{n+1}$ (donc $O_o = k$) , alors l'homomorphisme canonique $\mathcal{O} \longrightarrow O_n$ est un élément de $\mathrm{Hom}(\mathcal{O}, O_n)$, donc définit un élément de $F(O_n)$, i. e. un O_n-schéma plat X_n dont la réduction mod $\mathfrak{r}$ est X_o . Ces X_n se déduisent les uns des autres par extension des scalaires (i. e. ici par réductions), d'où résulte qu'ils proviennent d'un schema formel $\mathcal{X}$ bien déterminé sur le schéma formel des modules $\mathcal{Y}$; $\mathcal{X}$ est plat sur $\mathcal{Y}$ et $\mathcal{X}_o = X_o$. L'isomorphisme (*) est alors donné, comme on voit aussitôt, en associant à tout homomorphisme de k-algèbres $\mathcal{O} \longrightarrow A$ la classe du A-schéma $\mathcal{X} \otimes_{\mathcal{O}} A$ (i. e. à tout morphisme de k-schémas $\mathcal{Y}' = \mathrm{Spec}(A) \longrightarrow \mathcal{Y}$, on associe le $\mathcal{Y}'$-schéma $\mathcal{X} \otimes_{\mathcal{Y}} \mathcal{Y}'$ obtenu par changement de base). De plus, on voit que l'isomorphisme (*) et sa description précédente seront valables encore si on suppose seulement que A est une k-algèbre locale noethérienne et complète (pas nécessairement artinienne). Bien entendu, comme d'habitude, $\mathcal{O}$ peut fort bien *à priori* avoir des éléments nilpotents, et il semble probable qu'il doive exister des cas où $\mathcal{O}$ est lui-même artinien, sans être identique à k . C'est dire à quel point le point de vue de Kodaira-Spencer (se bornant à prendre des A qui sont des anneaux *réguliers*) est inadéquat *a priori* dans le cas général.

Il reste à donner des conditions suffisantes pour qu'il existe un schéma formel des modules pour X_o , supposé propre sur k . De façon générale, il est facile de donner des conditions nécessaires et suffisantes simples sur un foncteur $A \longrightarrow F(A)$ (de k-algèbres locales de rang fini, à valeurs dans les ensembles) pour qu'il puisse se mettre sous la forme $\mathrm{Hom}(\mathcal{O}, A)$ pour $\mathcal{O}$ convenable. Nous ne les détaillerons pas ici. Signalons seulement que dans le cas qui nous occupe, ces conditions imposent des conditions non triviales de nature cohomologique sur X_o , et il semble peu probable qu'elles soient toujours vérifiées, bien que le conférencier n'ait pas construit de contre-exemple. Il semble plausible par contre que la condition $H^o(X , \mathcal{G}_{X_o/k}) = 0$ soit une condition <u>suffisante</u> (bien que nullement nécessaire) pour l'existence d'un schéma formel de modules. Nous nous bornons à énoncer ici un théorème dans un cas particulièrement simple (dont l'analogue en théorie des espaces analytiques est bien connu, cf. KODAIRA-SPENCER), qui s'établit sans difficulté à l'aide des résultats du numéro précédent :

THEOREME 10. - <u>Soit</u> X_o <u>un schéma propre et simple sur le corps</u> k , <u>tel que</u>

$$H^o(X_o , \mathcal{G}_{X_o/k}) = H^2(X_o , \mathcal{G}_{X_o/k}) = 0$$

<u>Alors il existe un schéma formel des modules pour</u> X_o , <u>correspondant à un anneau local régulier</u> $\mathcal{O}$ (i. e. une algèbre de séries formelles sur k) .

Comme nous l'avons déjà signalé, il n'est pas vrai en général que le schéma formel $\mathfrak{X}$ sur $\mathcal{O}$ soit algébrisable ; mais on sait que c'est vrai cependant quand X_o est projectif et $H^2(X_o , \mathcal{O}_{X_o}) = 0$ (théorème 4) , par exemple quand X_o est de dimension 1. C'est ce qui donne quelque support à l'espoir de construire un schéma de modules sur les entiers pour les courbes de genre donné ...

Remarquons aussi que des méthodes comme celles exposées dans ce numéro peuvent s'appliquer dans la construction et l'étude des variétés de Picard, et bien d'autres constructions encore. Nous y reviendrons prochainement.

8. <u>Application au groupe fondamental.</u>

Les techniques exposées permettent d'aborder l'étude systématique du groupe fondamental, sur le modèle de la théorie topologique. Les deux premiers théorèmes énoncés dans ce numéro sont des généralisations de résultats d'un travail récent de LANG-SERRE.

Soit X un schéma, alors un X-schéma X' est appelé un <u>revêtement non ramifié</u>

de X si

i. X' est fini sur X , i. e. est défini par un faisceau cohérent d'algèbres $\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{A}(X')$ sur X

ii. $\underset{\sim}{A}$ est un faisceau localement libre sur X

iii. Pour tout $x \in X$, le quotient $\underset{\sim}{A}_x / \mathfrak{m}_x \underset{\sim}{A}_x = \underset{\sim}{A}_x \otimes_{O_x} \mathcal{K}(x)$ est une algèbre séparable sur $\mathcal{K}(x)$.

Cette notion de revêtement non ramifié (due à SERRE et au conférencier) possède toutes les propriétés élémentaires auxquelles on peut s'attendre raisonnablement, et dont nous ne dresserons pas la liste. Bornons-nous à dire qu'elle donne lieu à une théorie de Galois calquée sur la théorie de Galois classique (et la contenant ; les démonstrations étant plûtot plus simples que les démonstrations généralement reçues pour cette dernière) et la théorie galoisienne des revêtements topologiques. De façon précise, appelons point géométrique d'un schéma X un morphisme a du spectre ξ d'un corps algebriquement clos Ω dans X , i. e. la donnée d'une extension algébriquement close du corps résiduel $\mathcal{K}(x)$ d'un point $x = |a|$ de X (appelé localité du point géométrique a) . Si alors X' est un revêtement non ramifié de X , on peut lui associer l'ensemble $E_a(X')$ des "points géométriques de X' au-dessus de a " , i. e. l'ensemble des couples formés d'un $x' \in X'$ au-dessus de x et d'un $\mathcal{K}(x)$-homomorphisme dans Ω . On obtient ainsi (pour (X , a) fixés) un foncteur $F(X , a)$ de la catégorie $R(X)$ des revêtements non ramifiés X' de X dans la catégorie des ensembles finis. Si X est connexe, le couple formé par $R(X)$ et $F(X , a)$ possède les propriétés formelles qu'il faut pour être isomorphe au couple analogue défini par un groupe topologique compact totalement discontinu π (i. e. limite projective de groupes finis) convenable : on prend la catégorie $C(\pi)$ des ensembles finis E sur lesquels π opère continûment, et le foncteur identique $F(\pi)(E) = E$ de cette catégorie dans la catégorie des ensembles finis. D'ailleurs le groupe π est déterminé à un isomorphisme canonique près par la condition que $(C(\pi) , F(\pi))$ soit isomorphe à un couple donné. En l'occurence, π s'appelle le groupe fondamental du schéma connexe X en le point géométrique a , et se désigne par $\pi_1(X , a)$. Si X n'est pas connexe, on le remplace par la composante connexe de $x = |a|$. Si cependant X est connexe, alors les groupes $\pi_1(X , a)$ pour deux points géométriques a' , a'' de X sont isomorphes (l'isomorphisme étant déterminé à des automorphismes intérieurs près), de sorte que comme d'habitude on peut choisir a au mieux de son intérêt, par exemple au point générique de

X supposé irréductible. Bien entendu, $\pi_1(X, a)$ est un foncteur covariant en le schéma pointé (X, a). Tout énoncé concernant la classification de revêtements inséparables peut se traduire alors en langage de théorie des groupes, suivant le dictionnaire bien connu (à cela près qu'il faut tenir compte du fait qu'ici on a des groupes topologiques).

Notre but est de développer l'analogue de la suite exacte d'homotopie des espaces fibrés, relativement à un morphisme propre $f : X \longrightarrow Y$. Evidemment, faute de savoir ce que sont les groupes d'homotopie supérieurs, on n'aura que des résultats nécessairement incomplets. Pour pouvoir appliquer les théorèmes fondamentaux du n°3, nous devons d'abord expliciter quelques lemmes élémentaires concernant les schémas sur des corps ou des anneaux d'Artin (conformément au procédé général !).

LEMME 1. - Soit (X', a') un revêtement non ramifié ponctué associé à une représentation ponctuée de $\pi_1(X, a)$ dans un ensemble fini E (muni du point marqué e). Alors le morphisme canonique $\pi_1(X', a') \longrightarrow \pi_1(X, a)$ identifie le premier groupe au stabilisateur de e dans $\pi_1(X, a)$ (et est par suite injectif).

LEMME 2. - Soit X un schéma algébrique sur le corps k, k' une extension radicielle de k, alors tout revêtement non ramifié de $X \otimes_k k'$ provient par image réciproque (i. e. extension des scalaires) d'un revêtement non ramifié de X, déterminé à un isomorphisme canonique près.

Il résulte en particulier de ces deux lemmes que pour toute extension algébrique K de k, et tout point géométrique a' de $X' = X \otimes_k K$ se projetant sur le point géométrique a de X, l'homomorphisme fonctoriel $\pi_1(X', a') \rightarrow \pi_1(X, a)$ est injectif.

LEMME 3. - Soit Z un schéma complet au-dessus d'un anneau local artinien A, tel que $H^0(X, \mathcal{O}_X) = A$, soit X' un revêtement non ramifié de X et soit $A' = H^0(X', \mathcal{O}_{X'})$, qui est donc un anneau fini sur A (pouvant a priori être ramifié sur A). Soient X_0, X'_0 les sous-schémas réduits associés à X, X' (obtenus en divisant par les faisceaux des éléments nilpotents dans $\mathcal{O}_X$, $\mathcal{O}_{X'}$), soit k un sous-corps de $A/\mathfrak{r}(A)$ sur lequel $A/\mathfrak{r}(A)$ soit fini (ainsi X_0 est un schéma algébrique complet sur k, et X'_0 en est un revêtement non ramifié). Soit enfin Ω une extension algébriquement close de k, et considérons le revêtement non ramifié $X'_0 \otimes_k \Omega$ de $X_0 \otimes_k \Omega$. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :

i. $X'_0 \otimes_k \Omega$ est complètement décomposé sur $X_0 \otimes_k \Omega$.

ii. Le morphisme naturel $X' \longrightarrow X \otimes_A A'$ est un isomorphisme.

Sous ces conditions, A' est une extension non ramifiée de A . Enfin, si X' est connexe, la condition (i) équivaut à la condition suivante plus faible en apparence :

i. bis $X'_0 \otimes_k \Omega$ admet une section régulière au-dessus de $X_0 \otimes_k \Omega$.

Lorsque la condition (ii) est vérifiée, nous dirons que le revêtement non ramifié X' de X est géométriquement trivial.

LEMME 4. - Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme propre tel que $f_*(O_X) = O_Y$. Soient a un point géométrique de X , b sa projection sur Y . Alors $\pi_1(X , a) \longrightarrow \pi_1(Y , b)$ est surjectif.

Il faut montrer en effet ceci : si un revêtement non ramifié Y' de Y , (correspondant à un faisceau d'algèbres localement libre $\underset{\sim}{A}$) est tel que $X \otimes_Y Y'$ est disconnexe, alors Y' l'est aussi. En effet $f_*(\underset{\sim}{A})$ sera somme directe de deux faisceaux d'anneaux non nuls, donc son image directe aussi, or cette dernière n'est autre que $\underset{\sim}{A} \otimes f_*(O_X) = \underset{\sim}{A}$.

LEMME 5. - Soit X un schema complet au-dessus d'un corps k , on suppose que $H^0(X , O_X)$ est un anneau local A et que $A/\mathfrak{r}(A)$ est radiciel sur k . Soit Ω une clôture algébrique de k , et soit $\bar{X} = X \otimes_k \Omega$ (il est connexe). Choisissons un point géométrique $\bar{a}$ de $\bar{X}$, se projetant sur le point géométrique a de X , alors on a une suite exacte

$$e \longrightarrow \pi_1(\bar{X} , \bar{a}) \longrightarrow \pi_1(X , a) \longrightarrow \pi_1(k , b) \longrightarrow e$$

(où $\pi_1(k , b)$ est le groupe de Galois de Ω sur k) .

Le fait que le premier homomorphisme est injectif a été vu avec les lemmes 1 et 2 , l'exactitude au milieu résulte du lemme 3 , enfin la surjectivité du dernier homomorphisme (qui seul fait appel au fait que $A/\mathfrak{r}(A)$ soit radiciel) résulte du lemme 4 .

PROPOSITION 4. - Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme propre et plat tel que pour tout $y \in Y$, $H^0(f^{-1}(y) , O_{f^{-1}(y)})$ soit une algèbre séparable sur le corps résiduel $\chi(y)$ (ce qui est le cas par exemple si $f^{-1}(y)$ est un schéma séparable sur $\chi(y)$, i. e. réduit et tel que les corps correspondants à ces composantes irreductibles soient des extensions séparables de $\chi(y)$) . Alors le revêtement

Y' de Y associé à $f_*(O_X)$ est non ramifié.

La demonstration est facile grâce au théorème 2 .

Cette proposition, jointe au lemme 1 , ramène pratiquement l'étude homotopique des morphismes propres et plats (à fibres séparables) au cas où on a $f_*(O_X) = O_Y$ (car utilisant la factorisation de Stein, on remplacera Y par Y') .

REMARQUE. - Un morphisme plat de type fini dont les fibres sont des schémas séparables (resp. simples) est appelé séparable (resp. simple). On montre que si f est plat et si $f^{-1}(y)$ est séparable (resp. simple) alors il existe un voisinage de $f^{-1}(y)$ sur lequel f est séparable (resp. simple). Le même résultat est valable pour "absolument normal" ("théorème de Bertini").

Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme propre tel que

$$\text{(i)} \qquad f_*(O_X) = O_Y$$

et soit X' un schéma fini sur X . Soit Y' le revêtement de Y correspondant à la factorisation de Stein de $X' \longrightarrow Y$ (cf théorème 5) . Soit $y \in Y$, donc l'ensemble des composantes connexes de la fibre F' de X' sur y s'identifie à l'ensemble des points y' de Y' au-dessus de y (théorème 5). Considérons le morphisme évident

$$(*) \qquad X' \longrightarrow X \times_Y Y'$$

déduit des morphismes naturels $X' \longrightarrow X$ et $X \longrightarrow Y'$; ce sera un isomorphisme chaque fois que X' est de la forme $X \times_Y Y''$, où Y'' est un revêtement non ramifié de Y , et alors Y' ne sera autre que Y'' et $(*)$ sera l'identité. Nous voulons précisément donner des conditions moyennant lesquelles X' est de la forme qu'on vient d'indiquer, i. e. que Y' est non ramifié et $(*)$ un isomorphisme . Pour ceci, introduisons la fibre F de X en y , c'est un schéma propre sur $\mathcal{K}(y)$ dont F' est un revêtement (non ramifié si X l'est). Soit F'_1 une composante connexe de F' correspondant à un point y'_1 de Y' au-dessus de y . Supposons de plus

(ii) X' est non ramifié sur X aux points de F'_1

(par suite F'_1 est un revêtement non ramifié de F) , et

(iii) F'_1 est un revêtement géométriquement trivial de F (cf. lemme 3)

THÉORÈME 11. - Sous ces conditions, il existe un voisinage ouvert U' de y'_1

dans Y' , tel que (*) soit un isomorphisme au-dessus de U' . De plus Y' est non ramifié en y'_1 au-dessus de Y (mais peut être ramifié aux autres points y' de Y' au-dessus de y) .

Bien entendu, les conditions (ii) et (iii) sont aussi nécessaires pour la validité de la conclusion du théorème. La démonstration du théorème est facile, à l'aide du lemme 3 et du théorème 2 .

COROLLAIRE 1. - Supposons toujours (i) satisfait. Pour qu'un revêtement non ramifié sur X soit isomorphe à l'image réciproque d'un revêtement non ramifié Y' de Y , il faut et il suffit que X' induise sur chaque fibre $f^{-1}(y)$ un revêtement géométriquement trivial.

Comme d'après le théorème 11 , l'ensemble des points de Y pour lesquels cette condition est remplie est ouvert, il suffit de la vérifier sur les points y qui sont fermés ... Notons l'énoncé suivant équivalent au corollaire 1 : Le noyau de l'homomorphisme (surjectif d'après le lemme 4) $\pi_1(X) \longrightarrow \pi_1(Y)$ est le sous-groupe invariant fermé engendré par les images dans $\pi_1(X)$ des $\pi_1(\overline{f^{-1}(y)})$, où $\overline{f^{-1}(y)}$ désigne le schéma $f^{-1}(y) \otimes_{k(y)} \overline{\mathcal{K}(y)}$, ($\overline{\mathcal{K}(y)}$ désignant une clôture algébrique de $\mathcal{K}(y)$) . On notera que, faute de pouvoir choisir le même point base pour toutes les fibres, les homomorphismes $\pi_1(\overline{f^{-1}(y)}) \longrightarrow \pi_1(X)$ ne sont de toutes façons déterminés (une fois choisi un point base pour X , et par suite pour Y) que modulo composition par un automorphisme intérieur dans $\pi_1(X)$.

COROLLAIRE 2. - Sous les conditions générales du théorème 11 , supposons de plus Y , X , X' intègres, et soient K , L , L' leurs corps. Alors il existe une sous-extension séparable K' de K dans L' , linéairement disjointe de L , telle que $L' = LK'$ (d'où $L' = L \otimes_K K'$) .

(On applique la dernière partie du lemme 3 à la fibre générique de X) . Le cas d'application le plus intéressant du théorème 11 est obtenu quand f est un morphisme séparable. Alors X' est aussi séparable sur Y , donc en vertu de la proposition 4, Y' est non ramifié sur Y , donc le deuxième membre $X \times_Y Y'$ dans (*) est non ramifié sur X . On en conclut facilement :

COROLLAIRE 3. - Supposons, en plus de (i) , que f soit séparable. Soit X' un revêtement non ramifié et connexe de X , pour que X soit image inverse d'un revêtement non ramifié Y' de Y , il faut et il suffit que le revêtement $\bar{F}'$ induit sur une fibre géométrique $\bar{F} = \overline{f^{-1}(y)}$ admette une section régulière.

On notera qu'il n'était pas nécessaire de supposer que $\bar{F}'$ soit géométriquement trivial sur $\bar{F}$ (ce qui sera vrai a posteriori, bien que a priori cette condition soit beaucoup plus forte). Le corollaire 3 est en fait équivalent à l'énoncé suivant :

COROLLAIRE 4. - Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme propre et séparable tel que $f_*(O_X) = O_Y$, soit $\bar{F}$ la fibre géométrique d'un point $y \in Y$, et choisissons un point géométrique dans $\bar{F}$, d'où par les morphismes $\bar{F} \longrightarrow X \longrightarrow Y$ des points gépmétriques dans X, Y, qui seront pris comme points bases pour les groupes fondamentaux de $\bar{F}$, X, Y. Sous ces conditions on a la suite exacte

$$\boxed{\pi_1(\bar{F}) \longrightarrow \pi_1(X) \longrightarrow \pi_1(Y) \longrightarrow e}$$

On en déduit facilement les deux énoncés suivants de SERRE-LANG, débarassés ici de toute hypothèse de normalité :

COROLLAIRE 5. - Soient X, Y des schémas connexes sur un corps k, on suppose que le schéma réduit $X_{réd}$ est séparable sur k (ce qui est automatiquement vrai si k est parfait) et complet. Choisissons un point géométrique a (resp. b) dans X (resp. Y) d'où un point géométrique $c = (a, b)$ dans $X \times_k Y$ et un morphisme naturel

$$\pi_1(X \times_k Y, c) \longrightarrow \pi_1(X, a) \times \pi_1(Y, b)$$

(déduits des morphismes fonctoriels de $\pi_1(X \times Y, c)$ dans $\pi_1(X, a)$ et $\pi_1(Y, b)$). Ce morphisme est injectif, et même bijectif si k est algébriquement clos.

(La surjectivité dans ce dernier cas étant à peu près triviale). On en déduit, avec SERRE-LANG :

COROLLAIRE 6. - Soit X un schéma algébrique connexe sur un corps algébriquement clos k, soit K une extension algébriquement close de k, alors les groupes fondamentaux de X et $X \otimes_k K$ sont les mêmes, i. e. tout revêtement non ramifié de ce dernier schéma provient par extension des scalaires d'un revêtement non ramifié (unique à un isomorphisme près) de X.

REMARQUES.

1) Utilisant la proposition 4, on voit que l'hypothèse $f_*(O_X) = O_Y$ dans le corollaire 4 n'est pas essentielle. Dans le cas général, il faut, au lieu de mettre le groupe unité e après $\pi_1(Y)$, continuer par $\pi_0(\bar{F}) \longrightarrow \pi_0(X) \longrightarrow \pi_0(Y) \longrightarrow e$

comme en Topologie algébrique.

2) En général, on ne peut rien dire pour l'instant sur le noyau de $\pi_1(\bar{F}) \to \pi_1(X)$, qui devrait faire intervenir un $\pi_2(Y)$. Il semble cependant qu'on doive pouvoir démontrer que $\pi_1(\bar{F}) \to \pi_1(X)$ est injectif si Y est le spectre d'un anneau local A, en s'appuyant sur le théorème 12 plus bas (qui affirme qu'il en est ainsi si A est complet).

Le théorème 11 n'utilisait que les théorèmes 1 et 2. Nous allons appliquer maintenant le théorème 3, en nous appuyant sur le lemme élémentaire suivant :

LEMME 6. - Soit X un schema, X_o le schéma réduit correspondant (i. e. où on a tué les éléments nilpotents). Alors tout revêtement non ramifié X'_o de X_o est induit par un revêtement non ramifié X' de X, déterminé à un isomorphisme canonique près.

Ce lemme, de nature purement locale, joue ici un rôle analogue à celui du théorème 8, en théorie des modules. Le conjuguant avec le théorème d'existence (théorème 3), on en déduit ici :

THÉORÈME 12. - Soit A un anneau local noethérien et complet de corps résiduel k. Soit X un schéma propre sur A. Alors tout revêtement non ramifié X'_o de $X_o = X \otimes_A k$ est induit par un revêtement non ramifié X' de X, unique à un isomorphisme près.

En d'autres termes :

COROLLAIRE 1. - Choisissons un point géométrique dans X_o comme point base pour les groupes fondamentaux de X_o et X. Alors l'homomorphisme canonique $\pi_1(X_o) \to \pi_1(X)$ est un isomorphisme.

Appliquons maintenant à X_o le lemme 5, (en supposant que $H^o(X_o, O_{X_o}) = k$ pour simplifier), et remarquons que A étant complet, ses extensions non ramifiées correspondent aux extensions non ramifiées de son corps résiduel, i. e. on a $\pi_1(Y) = \pi_1(k)$ (où $Y = \mathrm{Spec}(A)$). On trouve la suite exacte :

$$e \to \pi_1(\bar{X}_o) \to \pi_1(X) \to \pi_1(Y) \to e$$

COROLLAIRE 2. - Soit $f : X \to Y$ un morphisme propre et plat, soient y_1 un point de Y et y_o une spécialisation de y_1, considérons les fibres "géométriques" correspondantes $\bar{X}_1$ et $\bar{X}_o$, on suppose $\bar{X}_o$ séparable et connexe (ce qui implique que $\bar{X}_1$ satisfait aux mêmes conditions). On peut alors trouver un homomorphisme de groupes $\pi_1(X_1) \to \pi_1(X_o)$, défini à un automorphisme intérieur près, et cet homomorphisme est surjectif.

On pourrait espérer que cet homomorphisme est toujours bijectif. malheureusement il n'en est rien en général si $\kappa(y_0)$ est de caractéristique > 0 . Nous allons obtenir cependant plus bas une majoration du noyau de cet homomorphisme (du moins si $\tilde{X}_0$ est simple), impliquant que si $\kappa(y_0)$ est de caractéristique 0 , alors l'homomorphisme ci-dessus est bijectif (résultat qu'on pourrait aussi prouver par voie transcendante). Du moins obtenons-nous déjà, en tous cas, une majoration du π_1 d'une fibre speciale à l'aide de celui d'une fibre générique. Utilisant par exemple le fait qu'une courbe algébrique en caractéristique p se remonte en une courbe en caracteristique 0 (théorème 9 , corollaire 4.) on trouve par voie transcendante :

COROLLAIRE 3. - Soit X_0 le schéma d'une courbe complète simple sur un corps algébriquement clos de caractéristique quelconque, soit g le genre de X_0 , alors $\pi_1(X_0)$ admet $2g$ générateurs topologiques, liés par la relation bien connue.

On en déduit, par une technique bien connue de sections hyperplanes :

COROLLAIRE 4. - Soit X un schéma projectif simple sur un corps algébriquement clos de caractéristique quelconque, alors $\pi_1(X)$ admet un nombre fini de générateurs topologiques.

Cherchons le noyau de l'homomorphisme $\pi_1(\tilde{X}_1) \longrightarrow \pi_1(\tilde{X}_0)$. Pour ceci, on peut supposer que Y est le spectre d'un anneau de valuation discrète complet $V = O_y(y = y_0)$. La question est équivalente à la suivante : étant donné un revêtement non ramifié $\tilde{X}'_1$ de $\tilde{X}_1$ (qu'on peut si on veut supposer galoisien), déterminer sous quelles conditions il provient d'un revêtement non ramifié de X_0 . A priori, le revêtement donné provient, par extension des scalaires, d'un revêtement non ramifié $X_1^!$ de $X_1 \otimes_K K'$, où K' est une sous-extension finie de la clôture algébrique $\bar{K}$ du corps des fractions K de V ; si $X_1^!$ était galoisienne de groupe G , on peut choisir $X_1^!$ galoisienne de groupe G . On a alors : Pour que $X_1^! \otimes_{K'} \bar{K} = \bar{X}_1^!$ provienne d'un revêtement non ramifié de X_0 , il faut et il suffit que l'on puisse trouver une extension finie K'' de K' dans $\bar{K}$ telle que $X_1'' = X_1^! \otimes_{K'} K''$ soit de la forme $X'' \otimes_{V''} K''$, où V'' est la clôture normale de V dans K'' , et où X'' est un revêtement non ramifié de $X \otimes_V V''$. Supposons par exemple X_0 absolument normale, d'où résulte que $X \otimes_V V''$ est normale (car plat sur V'' et à fibre spéciale normale), dont le corps des fonctions est identique à celui $K''(X_1)$ de

$$X_1 \otimes_K K'' = (X \otimes_V K) \otimes_K K'' = X \otimes_V K'' = (X \otimes_V V'') \otimes_{V''} K'' .$$

Soit $L'' = K''(X'_1)$ le corps des fonctions de $X'_1 \otimes_{K'} K''$, c'est une extension finie séparable de $K''(X_1)$, et la condition ci-dessus signifie aussi que L'' est une extension non ramifiée du corps des fonctions de $X \otimes_V V''$ (i. e. le normalisé de $X \otimes_V V''$ dans L'' est non ramifié sur $X \otimes_V V''$) . Il suffit d'ailleurs de vérifier que L'' est non ramifié aux points de la fibre spéciale de $X \otimes_V V''$ (puisqu'il est non ramifié au-dessus de la fibre générique $X_1 \otimes_K K''$) . Si maintenant X_o est simple, il résulte du "théorème de pureté" de NAGATA-ZARISKI qu'il suffit même de vérifier que L'' est non ramifié au-dessus de l'anneau local $\mathcal{O}''$ du point générique de la fibre spéciale de $X \otimes_V V''$, qui est un anneau de valuation discrète, normalisé dans $K''(X_1)$ de l'anneau local $\mathcal{O} \subset K(X_1)$ du point générique de la fibre spéciale de X . Donc on a obtenu :

COROLLAIRE 5. - Sous les conditions et avec les notations précédentes, pour que le revêtement non ramifié $X'_1 \otimes_{K'} \bar{K}$ de $\bar{X}_1 = X_1 \otimes_K \bar{K}$ provienne d'un revêtement non ramifié de $\bar{X}_o$, il faut et il suffit qu'il existe une sous-extension finie K'' de $\bar{K}/K'$ telle que $K''(X'_1)$ soit non ramifié au-dessus de l'anneau de valuation discrète $\mathcal{O}'' \subset K''(X_1)$.

Notons maintenant que $\mathcal{O}''$ est normalisé dans $K''(X_1)$ de l'anneau de valuation discrète $\mathcal{O}' \subset K'(X_1)$ (normalisé de $\mathcal{O}$ dans $K'(X_1)$) , et que $\mathcal{O}'$ contient le normalisé V' de V dans K' , une uniformisante u de V' étant aussi une uniformisante de $\mathcal{O}'$. Supposons maintenant X'_1 galoisien de groupe de Galois G d'ordre n premier à la caractéristique p de $\varkappa(y_o)$, (qui est aussi la caractéristique du corps résiduel de $\mathcal{O}'$) . Donc $K'(X'_1)$ est "tamely ramified" au-dessus de $\mathcal{O}'$, d'où il résulte facilement ("lemme de Abhyankar") que si on lui adjoint une racine n-ième v d'une uniformisante de $\mathcal{O}'$, il devient non ramifié au-dessus du normalisé de $\mathcal{O}'$ dans $K'(X_1)(v)$. Or on peut prendre pour v une racine n-ième d'une uniformisante de V' , ce qui prouve que la condition du corollaire 5 est satisfaite. (Cette possibilité d'utiliser le lemme de Abhyankar et le théorème de pureté m'a été vendue par SERRE). Pour exprimer le résultat obtenu, introduisons pour tout groupe compact totalement discontinu π le groupe quotient $\bar{\pi}$ de π par le sous-groupe fermé engendré par ses p-sous-groupes de Sylow, i. e. la limite projective des groupes quotients discrets de π qui sont d'ordre premier à p . Avec cette notation, on obtient :

THÉORÈME 13. - Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme propre et plat, soient y_1 un point de Y et y_o une spécialisation de y_1 , on suppose $\bar{X}_o$ connexe et simple. Alors l'homomorphisme $\bar{\pi}_1(\bar{X}_1) \longrightarrow \bar{\pi}_1(\bar{X}_o)$ déduit de l'homomorphisme surjectif du théorème 12, corollaire 2, est un isomorphisme.

En d'autres termes :

COROLLAIRE 1. - La classification des revêtements galoisiens non ramifiés, de groupe de Galois d'ordre premier à la caractéristique p de $\varkappa(y_o)$ est la même pour $\bar{X}_o$ et pour $\bar{X}_1$.

En particulier, si $\varkappa(y_o)$ est caractéristique nulle, on obtient par voie algébrique le fait que $\pi_1(\bar{X}_1) \longrightarrow \pi_1(\bar{X}_o)$ est bijectif.

Signalons enfin que les techniques utilisées donnent aussi le résultat suivant, plus général que le théorème 13 :

THÉORÈME 14. - Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme propre et simple, soit D un sous-schéma fermé de X , simple au-dessus de Y , de codimension 1 en tous ces points. Pour une fibre $Z = f^{-1}(z)$ de f , soit $Z' = Z - Z \cap D$ et soit $\pi_1^t(\bar{Z}')$ le quotient du groupe fondamental $\pi_1(Z')$ qui classifie les revêtements non ramifiés de $\bar{Z}'$ qui sont "tamely ramified" au-dessus de $\overline{Z \cap D}$. Soient y_o , y_1 comme dans le théorème 13 . Alors on a un homomorphisme surjectif (défini à un automorphisme intérieur près) $\pi_1^t(\bar{X}_1') \longrightarrow \pi_1^t(\bar{X}_o')$, et l'homomorphisme correspondant $\bar{\pi}_1^t(\bar{X}_1') \longrightarrow \bar{\pi}_1^t(\bar{X}_o')$ est un isomorphisme.

On en déduit des variantes correspondantes des corollaires au théorème 13, et du corollaire 4 au théorème 12. De même, utilisant le théorème 9, corollaire 2, on trouve par voie transcendante :

COROLLAIRE . - Soit X_o le schéma d'une courbe complète simple sur un corps algébriquement clos de caractéristique quelconque, soit $S = (s_i)_{1 \leq i \leq n}$ une partie finie à n éléments de X_o . Alors $\pi_1^t(X_o - S)$ admet $2g + n$ générateurs topologiques x_i , y_i $(1 \leq i \leq g)$ et σ_j $(1 \leq j \leq n)$ liés par la relation

$$\left(\prod_i x_i\, y_i\, x_i^{-1}\, y_i^{-1}\right) \sigma_1 \ldots \sigma_n = 1$$

où les σ_j sont des générateurs des groupes d'inertie correspondants aux s_j . Pour tout groupe fini G d'ordre premier à la caractéristique, engendré par des éléments $\bar{x}_i$, $\bar{y}_i$, $\bar{\sigma}_j$ satisfaisant la relation précédente, il existe un revêtement galoisien non ramifié de $X_o - S$, de groupe G , ayant des groupes d'inertie aux points s_j engendrés par les $\bar{\sigma}_j$.

Lorsque X_o est de genre 0 et que $n = 3$, on a une solution du "Problème des trois points", du moins pour les revêtements galoisiens d'ordre premier à la caracteristique. (Ici, le théorème 9 est d'ailleurs inutile, et il semble d'autre part qu'on puisse déduire le corollaire précédent du cas particulier envisagé dans le problème des trois points).

REMARQUES

1) Une étude plus complète, faisant sans doute intervenir des revêtements galoisiens généralisés de X , X_o , X_1 (à groupe de Galois éventuellement infinitésimal), devrait permettre de récupérer le noyau dans le théorème 12, corollaire 2. Par contre, une étude des revêtements admettant de la ramification pas "tame" semble devoir être beaucoup plus difficile.

2) Le lemme 6, joint à un résultat de Grauert concernant le complété formel d'un schéma projectif non singulier le long d'une section hyperplane (ou au théorème, non prouvé pour l'instant, mentionné dans la remarque 2 après le théorème 11), permet aussi de démontrer en géométrie algébrique "abstraite" le classique théorème de Lefschetz sur le groupe fondamental.

BIBLIOGRAPHIE

[1] DIEUDONNÉ (J.) et GROTHENDIECK (A.). - Eléments de géométrie algébrique, Publications mathématiques de l'Institut des Hautes Etudes Scientifiques (à paraître).

[2] GROTHENDIECK (Alexander). - The cohomology theory of abstract algebraic varieties, International Congress of Mathematicians [1958. Edinburgh] (à paraître).

[3] SERRE (Jean-Pierre). - Faisceaux algébriques cohérents, Annals of Math., Series 2, t. 61, 1955, p. 197-278.

[4] SERRE (Jean-Pierre). - Géométrie algébrique et géométrie analytique, Ann. Institut Fourier Grenoble, t. 6, 1955-1956, p. 1-42.

TECHNIQUE DE DESCENTE ET THÉORÈMES D'EXISTENCE EN GÉOMETRIE ALGÉBRIQUE
I. GÉNÉRALITÉS. DESCENTE PAR MORPHISMES FIDÈLEMENT PLATS

par Alexander GROTHENDIECK

D'un point de vue technique, le présent exposé, et ceux qui lui feront suite, peuvent être considérés comme des variations sur le célèbre "théorème 90" de Hilbert. L'introduction de la méthode de descente en géométrie algébrique semble due à A. WEIL, sous le nom de "descente du corps de base". WEIL se restreint d'ailleurs au cas d'extensions finies séparables de corps. Le cas d'extensions radicielles de hauteur 1 a été ensuite traité par P. CARTIER. Faute du langage des schémas, et plus particulièrement faute d'éléments nilpotents dans les anneaux qu'on se permettait de considérer, l'identité essentielle entre ces deux cas n'avait pu être formulée par CARTIER.

A l'heure actuelle, il semble que la technique générale de descente qui sera exposée (jointe le cas échéant aux théorèmes fondamentaux de la "géométrie formelle", cf. [3]) est à la base de la plupart des théorèmes d'existence en géométrie algébrique. Il convient de noter d'ailleurs que la dite technique peut certainement se transposer en "géométrie analytique", et on peut espérer que dans un proche avenir, les spécialistes sauront démontrer les analogues "analytiques" des théorèmes d'existence en géometrie formelle qui seront donnés dans l'exposé II. En tout cas, les récents travaux de KODAIRA-SPENCER, dont les méthodes semblent inaptes à la définition et l'étude de "variétés de modules" au voisinage de leurs points singuliers, montrent assez clairement la nécessité de méthodes plus proches de la théorie des schémas (que devront compléter bien entendu les techniques transcendantes).

Dans le présent exposé I, nous traiterons le cas de descente le plus élémentaire (indiqué dans le titre). Les applications des théorèmes 1, 2, 3 ci-dessous, sont cependant déjà fort nombreuses. Nous nous sommes bornés à en donner quelques-unes à titre d'exemple, sans essayer de leur donner ici le maximum de généralité possible.

Nous utiliserons librement le langage des schémas, pour lequel nous renvoyons à l'exposé déjà cité, ainsi qu'à [2]. Notons cependant expressément que les pré-schémas envisagés dans le présent exposé ne sont pas nécessairement noethériens, et les morphismes ne sont pas nécessairement de type fini. Ainsi, si A est un anneau local noethérien, de complété $\bar{A}$, on aura à considérer l'anneau non noethérien $\bar{\bar{A}} \otimes_{A} \bar{A}$, et les morphismes de schémas affines correspondants aux inclusions entre les anneaux envisagés.

A. Préliminaires sur les catégories.

1. Catégories fibrées, données de descente, morphismes de $\mathcal{F}$-descente.

a. DÉFINITION 1.1. - Une catégorie fibrée $\mathcal{F}$ de base $\underset{\sim}{C}$ est formée d'une catégorie $\underset{\sim}{C}$, pour tout $X \in \underset{\sim}{C}$ d'une catégorie $\mathcal{F}_X$, pour tout $\underset{\sim}{C}$-morphisme $f : X \longrightarrow Y$ d'un foncteur $f^* : \mathcal{F}_Y \longrightarrow \mathcal{F}_X$, noté aussi

$$f^*(\xi) = \xi \times_Y X$$

pour $\xi \in \mathcal{F}_Y$ (X étant considéré comme un "objet de $\underset{\sim}{C}$ au-dessus de Y", i. e. comme muni du morphisme f), et enfin pour deux morphismes composables $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$, d'un isomorphisme de foncteurs

$$c_{f,g} : (gf)^* \longrightarrow f^* g^*$$

ces données étant assujetties aux conditions suivantes :

(i) $id^* = id$

(ii) $c_{f,g}$ est l'isomorphisme identique si f ou g est un isomorphisme identique

(iii) Etant donnés trois morphismes composables $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} T$, on a commutativité dans le diagramme suivant d'isomorphismes formé au moyen des isomorphismes de la forme $c_{u,v}$:

$$\begin{array}{ccc} (h(gf))^* = ((hg)\ f)^* & \longrightarrow & f^*(hg)^* \\ \downarrow & & \downarrow \\ (gf)^*\ h^* \longrightarrow (f^*\ g^*)\ h^* & = & f^*(g^*\ h^*) \end{array}$$

EXEMPLE 1. - Soit $\underset{\sim}{C}$ une catégorie où les produits fibrés existent, on définit alors une catégorie fibrée $\mathcal{F}$ de base $\underset{\sim}{C}$ en posant $\mathcal{F}_X$ = catégorie des objets de $\underset{\sim}{C}$ au-dessus de X, le foncteur $f^* : \mathcal{F}_Y \longrightarrow \mathcal{F}_X$ correspondant à un morphisme $f : X \longrightarrow Y$ étant défini par le produit fibré $Z \rightsquigarrow Z \times_Y X$.

EXEMPLE 2. - Soit $\underset{\sim}{C}$ la catégorie des pré-schémas, et pour $X \in \underset{\sim}{C}$, soit $\mathcal{F}_X$ la catégorie des faisceaux quasi-cohérents de modules sur X. Si $f : X \longrightarrow Y$ est un morphisme de pré-schémas, $f^* : \mathcal{F}_Y \longrightarrow \mathcal{F}_X$ est le foncteur image inverse de faisceaux de modules. On obtient ainsi une catégorie fibrée de base $\underset{\sim}{C}$.

b. DÉFINITION 1.2. - Un diagramme

$$E \xrightarrow{u} E' \overset{v_1}{\underset{v_2}{\rightrightarrows}} E''$$

d'applications d'ensembles est dit exact si u est une bijection de E sur la partie de E' formée des $x' \in E'$ tels que $v_1(x') = v_2(x')$.

DÉFINITION 1.3. - Soit $\mathcal{F}$ une catégorie fibrée de base $\underset{\sim}{C}$, considérons un diagramme

$$(+) \qquad S \xleftarrow{\alpha} S' \overset{\beta_1}{\underset{\beta_2}{\leftleftarrows}} S''$$

de morphismes dans $\underset{\sim}{C}$ tels que $\alpha\beta_1 = \alpha\beta_2$; ce diagramme est dit $\mathcal{F}$-exact si pour tout couple ξ , η d'éléments de $\mathcal{F}_S$, le diagramme suivant d'applications d'ensembles

$$(+) \qquad \mathrm{Hom}(\xi , \eta) \xrightarrow{\alpha^*} \mathrm{Hom}(\alpha^*(\xi) , \alpha^*(\eta)) \overset{\beta_1^*}{\underset{\beta_2^*}{\rightrightarrows}} \mathrm{Hom}(\gamma^*(\xi) , \gamma^*(\eta))$$

(ou $\gamma = \alpha\beta_1 = \alpha\beta_2$) est exact.

Dans ce dernier diagramme, nous avons identifié $\beta_i^* \alpha^*$ à $(\alpha\beta_i)^* = \gamma^*$ grâce à $c_{\beta_i,\alpha}$, pour simplifier.

DÉFINITION 1.4. - Soit $\mathcal{F}$ une catégorie fibrée de base $\underset{\sim}{C}$, considérons deux morphismes $\beta_1 , \beta_2 : S'' \longrightarrow S'$ dans $\underset{\sim}{C}$. Soit $\xi' \in \mathcal{F}_{S'}$. On appelle donnée de recollement sur ξ' (relativement au couple (β_1 , β_2)), un isomorphisme de $\beta_1^*(\xi')$ sur $\beta_2^*(\xi')$. Si ξ' , $\eta' \in \mathcal{F}_{S'}$ sont munis chacun d'une donnée de recollement, un morphisme $u : \xi' \longrightarrow \eta'$ dans $\mathcal{F}_{S'}$ est dit compatible avec les données de recollement si on a commutativité dans le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \beta_1^*(\xi') & \longrightarrow & \beta_2^*(\xi') \\ \downarrow & & \downarrow \\ \beta_1^*(\eta') & \longrightarrow & \beta_2^*(\eta') \end{array}$$

De cette façon, les objets de $\mathcal{F}_{S'}$ munis d'une donnée de recollement (relativement à β_1 , β_2) forment alors une catégorie. Si $\alpha : S' \longrightarrow S$ est un morphisme tel que $\alpha\beta_1 = \alpha\beta_2$, alors pour tout $\xi \in \mathcal{F}_{S'}$, l'objet $\xi' = \alpha^*(\xi)$

de $\mathcal{F}_{S'}$ est muni d'une donnée de recollement canonique, puisque

$$\beta_i^* \alpha^*(\xi) \simeq (\alpha\beta_i)^* (\xi) = \gamma^*(\xi) \quad ,$$

en posant encore $\gamma = \alpha\beta_1 = \alpha\beta_2$; de plus, si $u : \xi \longrightarrow \eta$ est un morphisme dans $\mathcal{F}_S$, alors

$$\alpha^*(u) : \alpha^*(\xi) \longrightarrow \alpha^*(\eta)$$

est un morphisme dans $\mathcal{F}_{S'}$ compatible avec les données de recollement canoniques. On obtient ainsi un <u>foncteur canonique</u> de la catégorie $\mathcal{F}_S$ dans la catégorie des objets de $\mathcal{F}_{S'}$ munis d'une donnée de recollement relativement au couple (β_1 , β_2). Ceci dit, on peut aussi exprimer la définition 3 en disant que le diagramme (+) de ladite est dit $\mathcal{F}$-exact si le foncteur précédent est "pleinement fidèle", i. e. définit une équivalence de la catégorie $\mathcal{F}_S$ avec une sous-catégorie de la catégorie des objets de $\mathcal{F}_{S'}$ munis d'une donnée de recollement relativement à (β_1 , β_2).

DÉFINITION 1.5. - On dit qu'une donnée de recollement sur $\xi' \in \mathcal{F}_{S'}$ est <u>effective</u> (relativement à α) si ξ' muni de cette donnée est isomorphe à un $\alpha^*(\xi)$, avec $\xi \in \mathcal{F}_S$.

Dans le cas où le diagramme (+) est $\mathcal{F}$-exact, l'objet ξ de la définition précédente est donc déterminé à un isomorphisme unique près, et <u>la catégorie $\mathcal{F}_S$ est équivalente à la catégorie des objets de $\mathcal{F}_{S'}$ munis d'une donnée de recollement effective</u>.

c. Le cas le plus important est celui où

$$S'' = S' \times_S S'$$

les β_i étant les deux projections p_1 et p_2 de $S' \times_S S'$ sur ces deux facteurs (on suppose maintenant que dans $\underset{\sim}{C}$, les produits fibrés existent). On a alors deux conditions nécessaires immédiates pour qu'une donnée de recollement $\varphi : p_1^*(\xi') \longrightarrow p_2^*(\xi')$ sur un $\xi' \in \mathcal{F}_{S'}$ soit effective.

On a

(i) $$\Delta^*(\varphi) = \mathrm{id}_{\xi'}$$

où $\Delta : S' \longrightarrow S' \times_S S'$ désigne le morphisme diagonal, et où on a identifié $\Delta^* p_i^*(\xi')$ à $(p_i \Delta)^*(\xi') = \xi'$.

On a

(ii) $$p_{31}^*(\varphi) = p_{32}^*(\varphi)\, p_{21}^*(\varphi)$$

où p_{ij} désigne la projection canonique de $S' \times_S S' \times_S S'$ sur le produit partiel de son i-ième et j-ième facteur.

DÉFINITION 1.6. - On appelle <u>donnée de descente</u> sur $\xi' \in \mathcal{F}_{S'}$, relativement au morphisme $\alpha : S' \longrightarrow S$, une donnée de recollement sur ξ' relativement au couple (p_1, p_2) des projections canoniques $S' \times_S S' \longrightarrow S'$, satisfaisant aux conditions (i) et (ii) ci-dessus.

DÉFINITION 1.7. - Un morphisme $\alpha : S' \longrightarrow S$ est appelé un <u>morphisme de $\mathcal{F}$-descente</u> si le diagramme de morphismes

$$S \xleftarrow{\alpha} S' \underset{p_2}{\overset{p_1}{\leftleftarrows}} S' \times_S S'$$

est $\mathcal{F}$-exact (définition 1.3.) ; on dit que α est un <u>morphisme de $\mathcal{F}$-descente strict</u> si de plus toute donnée de descente (définition 1.6.) sur un objet de $\mathcal{F}_{S'}$ est effective.

Cette dernière condition peut aussi de façon plus imagée s'énoncer ainsi : <u>"Il revient au même" de se donner un objet de</u> $\mathcal{F}_S$, <u>ou un objet de</u> $\mathcal{F}_{S'}$ <u>muni d'une donnée de descente</u>.

Notons que si un morphisme de $\mathcal{F}$-descente $\alpha : S' \longrightarrow S$ admet une "<u>section</u>" $s : S \longrightarrow S'$ (i. e. un morphisme s tel que $\alpha s = id_S$) alors c'est un morphisme de $\mathcal{F}$-descente strict : si $\xi' \in \mathcal{F}_{S'}$ est muni d'une donnée de descente relativement à α, "il provient" en effet de $\xi = s^*(\xi')$.

d. On peut présenter de façon plus intuitive les notions précédentes, en introduisant, pour un objet-paramètre T de $\underset{\sim}{C}$ au-dessus de S, l'ensemble

$$\mathrm{Hom}_S(T, S') = S'(T) \quad ,$$

dont les éléments seront désignés par t, t', etc. Un objet $\xi' \in \mathcal{F}_{S'}$ étant donné, à tout $t \in S'(T)$ correspond alors un objet $t^*(\xi')$ de $\mathcal{F}_T$, qui sera aussi noté ξ'_t. Une donnée de recollement sur ξ' (relativement à p_1, p_2) est alors définie par la donnée, pour tout T sur S, et tout couple de points $t, t' \in S'(T)$, d'un isomorphisme

$$\varphi_{t',t} : \xi'_t \longrightarrow \xi'_{t'}$$

(satisfaisant des conditions évidentes de fonctoralité, pour T variable). Les conditions (i) et (ii) de 1.(c) s'écrivent alors

(i bis) $\qquad \varphi_{t,t} = id_{\xi'_t} \qquad$ pour tout T et tout $t \in S'(T)$

(ii bis) $\varphi_{t,t''} = \varphi_{t,t'}\,\varphi_{t',t''}$ pour tout T et t , t' , $t'' \in S'(T)$

On voit d'ailleurs que (ii bis), en faisant $t = t' = t''$, implique $\varphi^2_{t,t} = \varphi_{t,t}$ d'où, puisque $\varphi_{t,t}$ est un isomorphisme par hypothèse, la relation (i bis), qui est donc en fait une conséquence de (i bis) (donc (i) est une conséquence de (ii)). Mais si on ne suppose plus a priori les $\varphi_{t,t'}$ des isomorphismes (i. e. que $\varphi : p_1^*(\xi') \longrightarrow p_2^*(\xi')$ est un isomorphisme), alors (ii bis) n'implique plus nécessairement (i bis) ; la conjonction de (ii bis) et (i bis) implique cependant que les $\varphi_{t,t'}$ sont des isomorphismes (car on aura $\varphi_{t,t'}\,\varphi_{t',t} = \varphi_{t,t} = \mathrm{id}_{\xi'_t}$).

2. Diagrammes exacts et épimorphismes stricts, morphismes de descente. Exemples.

a. DÉFINITION 2.1. - Soit $\underset{\sim}{C}$ une catégorie. Un diagramme

$$T \xrightarrow{\ \alpha\ } T' \underset{\beta_2}{\overset{\beta_1}{\rightrightarrows}} T''$$

de morphismes dans $\underset{\sim}{C}$ est dit exact, si pour tout $Z \in \underset{\sim}{C}$, le diagramme correspondant d'applications ensemblistes

$$\mathrm{Hom}(Z\ ,\ T) \longrightarrow \mathrm{Hom}(Z\ ,\ T') \rightrightarrows \mathrm{Hom}(Z\ ,\ T'')$$

est exact (définition 1.2.). On dit alors que $(T\ ,\alpha)$ (ou par abus de langage, que T) est un noyau du couple de morphismes $(\beta_1\ ,\ \beta_2)$.

Ce noyau est évidemment déterminé à isomorphisme unique près. Si $\underset{\sim}{C}$ est la catégorie des ensembles, la définition précédente est compatible avec la définition 1.2. On définit de façon duale l'exactitude d'un diagramme

$$S \xleftarrow{\ \alpha\ } S' \underset{\beta_2}{\overset{\beta_1}{\leftleftarrows}} S''$$

de morphismes dans $\underset{\sim}{C}$; on dit alors que $(S\ ,\ \alpha)$ est un conoyau du couple de morphismes $(\beta_1\ ,\ \beta_2)$.

DÉFINITION 2.2. - Un morphisme $\alpha : S' \longrightarrow S$ est appelé un épimorphisme strict, si c'est un épimorphisme, et si pour tout morphisme $u : S' \longrightarrow Z$, la condition nécessaire suivante est aussi suffisante pour que u se factorise en $S' \rightarrow S \rightarrow Z$: pour tout $S'' \in \underset{\sim}{C}$ et tout couple de morphismes β_1 , $\beta_2 : S'' \longrightarrow S'$ tel que $\alpha\beta_1 = \alpha\beta_2$, on a aussi $u\beta_1 = u\beta_2$.

Si le produit fibré $S' \times_S S'$ existe, il revient au même de dire que le diagramme

$$S \xleftarrow{\ \alpha\ } S' \underset{p_2}{\overset{p_1}{\leftleftarrows}} S' \times_S S'$$

est exact, i. e. que S est un conoyau du couple (p_1 , p_2). En tous cas, un morphisme conoyau est un épimorphisme strict. Notons aussi qu'un épimorphisme strict qui est un monomorphisme est un isomorphisme. Nous laissons au lecteur de développer la notion duale de monomorphisme strict.

Pour préciser les relations entre la notion de morphisme de $\mathcal{F}$-descente, et la notion d'épimorphisme strict, nous introduisons encore les définitions suivantes :

DÉFINITION 2.3. - Un morphisme $\alpha : S' \longrightarrow S$ est appelé un épimorphisme universel (resp. un épimorphisme strict universel) si pour tout T sur S, le produit fibré $T' = S' \times_S T$ existe, et la projection $T' \longrightarrow T$ est un épimorphisme (resp. un épimorphisme strict).

Dans les très bonnes catégories (telles la catégorie des ensembles, la catégorie des faisceaux d'ensembles sur un espace topologique, les catégories abéliennes, etc.) les 4 notions d'épijectivité ainsi introduites coïncident ; elles sont au contraire toutes distinctes dans une catégorie telle que la catégorie des pré-schémas, où la catégorie des pré-schémas au-dessus d'un pré-schéma non vide donné S, même si on se borne à des S-schémas finis sur S.

DÉFINITION 2.4. - Un morphisme $\alpha : S' \longrightarrow S$ est appelé morphisme de descente (resp. un morphisme de descente strict) si c'est un morphisme de $\mathcal{F}$-descente (resp. un morphisme de $\mathcal{F}$-descente strict) (cf. définition 1.7.), où $\mathcal{F}$ désigne la catégorie fibrée de base $\underset{\sim}{C}$ des objets de $\underset{\sim}{C}$ sur des objets de $\underset{\sim}{C}$ (n° 1, exemple 1).

PROPOSITION 2.1. - Si dans $\underset{\sim}{C}$ les produits finis et les produits fibrés (finis) existent, alors il y a identité dans $\underset{\sim}{C}$ entre morphismes de descente, et épimorphismes stricts universels.

b. EXEMPLES. - Soit $\underset{\sim}{C}$ la catégorie des pré-schémas. Soit $S \in \underset{\sim}{C}$, soient S' et S'' deux pré-schémas finis sur S, i. e. correspondants à des faisceaux d'algèbres $\underset{\sim}{A}'$, $\underset{\sim}{A}''$ sur S qui en tant que faisceaux de modules sont quasi-cohérents et de type fini (i. e. cohérents si S est localement noethérien). Soit $\alpha : S' \longrightarrow S$ le morphisme structural de S', et soient β_1, β_2 deux S-morphismes de S'' dans S', définis par des homomorphismes d'algèbres $\underset{\sim}{A}' \longrightarrow \underset{\sim}{A}''$ désignés encore par β_1, β_2. Utilisant le fait qu'un morphisme fini est fermé (premier théorème de Cohen-Seidenberg) on prouve facilement que le diagramme

$$(+) \qquad S \xleftarrow{\alpha} S' \underset{\beta_2}{\overset{\beta_1}{\leftleftarrows}} S''$$

dans $\underset{\sim}{C}$ est exact si et seulement si le diagramme de faisceaux

$$\underset{\sim}{O}_S = \underset{\sim}{A} \xrightarrow{\alpha} \underset{\sim}{A}' \overset{\beta_1}{\underset{\beta_2}{\rightrightarrows}} \underset{\sim}{A}''$$

sur S est exact. En particulier, si $\alpha : S' \longrightarrow S$ est un morphisme fini correspondant à un faisceau $\underset{\sim}{A}'$ d'algèbres sur S , alors α est un épimorphisme strict si et seulement si le diagramme de faisceaux

$$\underset{\sim}{O}_S = \underset{\sim}{A} \longrightarrow \underset{\sim}{A}' \overset{p_1}{\underset{p_2}{\rightrightarrows}} \underset{\sim}{A}' \otimes_{\underset{\sim}{A}} \underset{\sim}{A}'$$

est exact (c'est un épimorphisme si et seulement si $\underset{\sim}{A} \longrightarrow \underset{\sim}{A}'$ est injectif). Si S est affine d'anneau A , donc S' affine d'anneau A' fini sur A , alors $S' \longrightarrow S$ est un épimorphisme strict si et seulement si $A \longrightarrow A'$ est un isomorphisme de A sur le sous-anneau de A' formé des $x' \in A'$ tels que

$$1_{A'} \otimes_A x' - x' \otimes_A 1_{A'} = 0$$

(c'est un épimorphisme si et seulement si $A \longrightarrow A'$ est injectif). Comme nous l'avons déjà signalé, même si S est le schéma d'un anneau local artinien, un morphisme fini $S' \longrightarrow S$ qui est un épimorphisme n'est pas nécessairement un épimorphisme strict. Cependant, on peut prouver que <u>si</u> S <u>est un pré-schéma noethérien, tout morphisme fini</u> $S' \longrightarrow S$ <u>qui est un épimorphisme, est le composé d'une suite finie d'épimorphismes stricts</u> (également finis). Cela montre d'ailleurs que le composé de deux épimorphismes stricts n'est pas nécessairement un épimorphisme strict.

c. Si (+) est un diagramme exact de morphismes finis, alors pour tout morphisme <u>plat</u> $T \longrightarrow S$ de pré-schémas, le diagramme transformé de (+) par le changement de base $T \longrightarrow S$ est encore exact. Il en résulte que si X , Y sont deux S-pré-schémas, X étant <u>plat</u> sur S , alors le diagramme d'applications ensemblistes suivant (où X' , Y' sont les images réciproques de X , Y sur S' , et X'' , Y'' leurs images réciproques sur S'')

$$\mathrm{Hom}_S(X , Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{S'}(X' , Y') \rightrightarrows \mathrm{Hom}_{S''}(X'' , Y'')$$

est exact. En particulier, si $\mathcal{F}$ désigne la catégorie fibrée de base la catégorie $\underset{\sim}{C}$ des pré-schémas, telle que pour $X \in \underset{\sim}{C}$, $\mathcal{F}_X$ soit la catégorie des X-pré-schémas <u>plats</u>, alors le diagramme (+) est $\mathcal{F}$-exact. (Ce résultat devient faux si on ne fait pas d'hypothèse de platitude, en particulier un épimorphisme strict fini n'est pas nécessairement un morphisme de descente). On voit de même que (+) est $\mathcal{F}$-exact si $\mathcal{F}$ désigne la catégorie fibrée pour laquelle $\mathcal{F}_X$ est la catégorie des faisceaux quasi-cohérents et <u>plats</u> sur le pré-schéma X (ici encore l'hypothèse de platitude est essentielle). Dans l'un et l'autre cas, la question de l'effectivité d'une donnée de recollement (et plus particulièrement, d'une donnée de descente, lorsque $S'' = S' \times_S S'$) sur un objet plat au-dessus de S' , est délicate, (et sa réponse dans divers cas particuliers est un des objets principaux des présents exposés). Le conférencier ignore si, pour tout épimorphisme strict fini $S' \dashrightarrow S$, toute donnée de descente sur un faisceau quasi-cohérent plat sur S' est effective (même en supposant que S est le spectre d'un anneau local artinien, et en se bornant aux faisceaux localement libres de rang 1). Plus généralement, soient A un anneau, A' une A-algèbre (tout est commutatif) telle que le diagramme d'applications

$$A \longrightarrow A' \rightrightarrows A' \otimes_A A'$$

soit exact, ce qui équivaut aussi au fait que le morphisme $S' \longrightarrow S$ correspondant pour les spectres de A , A' soit un morphisme de $\mathcal{F}$-descente, où $\mathcal{F}$ est la catégorie fibrée des faisceaux quasi-cohérents plats. Soit M' un A'-module plat muni d'une donnée de descente à A , i. e. d'un isomorphisme

$$\varphi : M' \otimes_A A' \xrightarrow{\sim} A' \otimes_A M'$$

de $A' \otimes_A A'$-modules, satisfaisant les conditions (i) et (ii) de 1.(c) (que nous laissons au lecteur le soin d'expliciter en termes de modules). Cette donnée est-elle effective (relativement à la catégorie fibrée des faisceaux quasi-cohérents plats) ? Soit M le sous-ensemble de M' formé des $x' \in M'$ tels que

$$\varphi(x' \otimes_A 1_{A'}) = 1_{A'} \otimes_A x' \quad ,$$

c'est un sous-A-module de M' . L'injection canonique $M \longrightarrow M'$ définit un homomorphisme de A'-modules $M \otimes_A A' \dashrightarrow M'$. L'effectivité de φ signifie alors ceci : M est un A-module plat, et l'homomorphisme précédent est un isomorphisme.

REMARQUE. - Dans les considérations précédentes, nous n'avions fait aucune hypothèse de platitude sur les morphismes du diagramme (+) , ce qui nous obligeait, pour avoir une technique de descente, de faire des hypothèses de platitude sur les objets au-dessus de S , S' qu'on considère. Dans le paragraphe 2, nous ferons une hypothèse de platitude sur $\alpha : S' \longrightarrow S$, ce qui nous permettra d'avoir une technique de descente pour des objets au-dessus de S , S' qui ne sont plus soumis à aucune condition de platitude. Dans tous les cas, il y a une hypothèse de platitude qui intervient. C'est là une des principales raisons de l'importance de la notion de platitude en géométrie algébrique (dont le rôle ne pouvait apparaître tant qu'on se bornait à des corps de base, sur lesquels n'importe quoi, en effet, est plat !).

3. Application aux étalements.- Soient A un anneau local, B une algèbre locale sur A dont l'idéal maximal induit celui de A. Nous dirons que B est étalé sur A (au lieu de "non ramifié", utilisé par ailleurs) s'il satisfait les conditions suivantes :

(i) B est plat sur A

(ii) $B/\mathfrak{m}B$ est une extension finie séparable de $A/\mathfrak{m} = k$ (où $\mathfrak{m}$ désigne l'idéal maximal de A).

Lorsque A et B sont noethériens et k algébriquement clos, cela signifie que l'homomorphisme $\bar{A} \longrightarrow \bar{B}$ sur les complétés qui prolonge $A \longrightarrow B$ est un isomorphisme. Un morphisme de type fini $f : T \longrightarrow S$ est dit étale en $x \in T$, ou encore T est dit étalé sur S en x, si $\underline{O}_x$ est étalé sur $\underline{O}_{f(x)}$, et f est dit étale ou encore f est appelé un étalement, ou T est dit étalé sur S, si f est étale en tout $x \in T$. Remarquons d'ailleurs que si S est localement noethérien, l'ensemble des points de T où f est étale est ouvert, et l'utilisation du "main theorem" de Zariski permet de préciser la structure de T/S au voisinage d'un tel point (par une équation de type bien connu).

Lorsque S est un schéma de type fini sur le corps des complexes, il lui correspond un espace analytique $\bar{S}$ au sens de SERRE [5], à cela près que $\bar{S}$ peut avoir des éléments nilpotents dans son faisceau structural, ce qui ne change rien d'essentiel dans [5]. On voit alors facilement que f est un étalement si et seulement si $\bar{f} : \bar{T} \longrightarrow \bar{S}$ l'est, i. e. si tout point de $\bar{T}$ admet un voisinage sur lequel $\bar{f}$ induit un isomorphisme sur un ouvert de $\bar{S}$. En particulier, à tout revêtement étale T de S (i. e. un morphisme fini étale $f : T \longrightarrow S$) correspond un revêtement étale $\bar{T}$ de $\bar{S}$, qui est connexe si et seulement si T l'est [5]. On voit d'ailleurs facilement que si T, T' sont deux schémas étalés sur S, alors l'application naturelle

$$\mathrm{Hom}_S(T , T') \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\bar{S}}(\bar{T} , \bar{T}')$$

est bijective, i. e. le foncteur $T \longrightarrow \bar{T}$ de la catégorie des schémas étalés sur S dans la catégorie des espaces analytiques étalés sur $\bar{S}$ est "pleinement fidèle", donc définit une équivalence de la première catégorie avec une sous-catégorie de la seconde. Un théorème de GRAUERT-REMMERT [2] implique que si S est normal, on obtient ainsi une équivalence de la catégorie des revêtements étales de $\bar{S}$ et de la catégorie des revêtements étales **(finis)** de S, i. e. que tout revêtement étale de $\bar{S}$ est $\bar{S}$-isomorphe à un $\bar{T}$, où T est un revêtement étale de S. Montrons que le théorème de Grauert-Remmert reste valable sans hypothèse de normalité sur S. Soit en effet d'abord $S' \longrightarrow S$ un épimorphisme strict fini, supposons le théorème démontré pour S', montrons qu'il sera vrai pour S. En effet, soit $\mathcal{C}$ un revêtement étale de $\bar{S}$, considérons son image réciproque $\mathcal{C}'$ sur S', qui correspond à un faisceau analytique cohérent $\mathcal{A}'$ d'algèbres sur S', image réciproque du faisceau d'algèbres $\mathcal{A}$ sur $\bar{S}$ définissant $\mathcal{C}$. Par hypothèse, sur S', $\mathcal{C}'$ provient d'un revêtement étale T' de S', i. e. $\mathcal{A}'$ provient d'un faisceau cohérent d'algèbres $\underset{\sim}{A}'$ sur S'. D'autre part $\mathcal{A}'$ est muni d'une donnée de descente canonique relativement à $\bar{S}' \longrightarrow \bar{S}$, i. e. d'un isomorphisme entre ses deux images réciproques sur $\bar{S}' \times_{\bar{S}} \bar{S}' = \overline{(S' \times_S S')}$, (satisfaisant des conditions (i), (ii)) et cet isomorphisme provient, d'après ce qui a été dit, d'un isomorphisme sur les faisceaux algébriques correspondants, i. e. d'une donnée de descente sur $\underset{\sim}{A}'$ relativement à $S' \longrightarrow S$. On vérifie facilement que cette dernière est effective (car celle sur $\mathcal{A}'$ l'est, et l'effectivité d'une donnée de descente, telle qu'elle a été explicitée au numéro précédent, se reconnaît localement sur les complétés des modules qui entrent en jeu). D'où un faisceau cohérent d'algèbres $\underset{\sim}{A}$ sur S, définissant un revêtement T de S, qui est le revêtement cherché. Le résultat précédent reste alors manifestement valable si $S' \longrightarrow S$ est seulement un composé d'un nombre fini d'épimorphismes stricts finis, i. e. est un épimorphisme fini quelconque (d'après le résultat de factorisation signalé au paragraphe 2). Il s'ensuit que le théorème de Grauert-Remmert reste valable si S est un schéma réduit, i. e. tel que $\underset{\sim}{O}_S$ n'ait pas d'éléments nilpotents, comme on voit en introduisant son normalisé S'. On passe facilement de là au cas général.

Une démonstration toute analogue, utilisant encore le résultat de factorisation pour les épimorphismes stricts finis et la nature "formelle" de l'effectivité de données de descente, permet de prouver le résultat suivant : soit S un pré-schéma localement noethérien et soit $S' \longrightarrow S$ un morphisme fini, surjectif, radiciel (ou, ce qui revient au même, un morphisme de type fini tel que pour tout T sur S, le morphisme $T' = S' \times_S T \to T$ soit un homéomorphisme, ce qu'on exprime encore en disant que $S' \longrightarrow S$ est un homéomorphisme universel). Pour tout T étalé sur S, considérons son image inverse $T' = T \times_S S'$, qui est étalé sur S'. Alors le foncteur $T \rightsquigarrow T'$ est une équivalence de catégories de la catégorie des pré-schémas T étalés sur S avec la catégorie des pré-schémas T' étalés sur S'. (On utilise la bijectivité de

$$\mathrm{Hom}_S(T_1 , T_2) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{S'}(T'_1 , T'_2)$$

pour deux pré-schémas T_1, T_2 étalés sur S, fait dont la vérification directe est facile, et le fait que le théorème énoncé est vrai si $S' = (S , \underset{\sim}{O}_S/\mathcal{J})$

où $\mathcal{J}$ est un faisceau cohérent nilpotent d'idéaux de $\underset{\sim}{O}_S$ ([4], lemme 6)). Noter d'ailleurs que nous ne supposons pas ici les T envisagés finis sur S. Ce résultat implique en particulier, que le morphisme $S' \longrightarrow S$ induit un isomorphisme du groupe fondamental [ ] de S' sur celui de S ("invariance topologique du groupe fondamental d'un pré-schéma").

4. Relations avec la 1-cohomologie.

a. Soit $\underset{\sim}{C}$ une catégorie où le produit de deux objets existe toujours, soit $T \in \underset{\sim}{C}$. Pour tout ensemble fini $I \neq \emptyset$, on peut considérer T^I, pour I variable, on obtient ainsi un foncteur covariant de la catégorie des ensembles finis non vides dans $\underset{\sim}{C}$, i. e. ce qu'on peut appeler un objet simplicial de $\underset{\sim}{C}$, noté K_T. Ce dernier dépend de façon covariante de T ; d'ailleurs si u, v sont deux morphismes $T \longrightarrow T'$, alors les morphismes correspondants $K_T \longrightarrow K_{T'}$ sont homotopes. Disons que T domine T' si $\mathrm{Hom}(T, T') \neq \emptyset$, c'est là une relation de préordre filtrante croissante dans $\underset{\sim}{C}$. Il résulte de ce qui précède que si T domine T', il existe une classe (à une homotopie près) canonique d'homomorphismes d'objets simpliciaux $K_T \longrightarrow K_{T'}$, en particulier si K_T et $K_{T'}$ sont tels que chacun domine l'autre, alors K_T et $K_{T'}$ sont homotopiquement équivalents. Soit maintenant F un foncteur (contravariant pour fixer les idées) de $\underset{\sim}{C}$ dans une catégorie abélienne $\underset{\sim}{C}'$, alors

$$C^*(T , F) = F(K_T)$$

est un objet cosimplicial de $\underset{\sim}{C}'$, donc définit de façon bien connue un complexe (de cochaînes) dans $\underset{\sim}{C}'$, dont on peut prendre la cohomologie

$$H^*(T , F) = H^*(C^*(T , F)) = H^*(F(K_T))$$

(on pourra mettre un $\underset{\sim}{C}$ en indice du H^* s'il y a possibilité de confusion). C'est là un foncteur cohomologique en F, dont la variance pour T variable résulte de ce qui a été dit sur les K_T ; de façon précise, pour F fixé et T variable dans $\underset{\sim}{C}$ (préordonné par la relation de domination) les $H^*(T , F)$ forment un système inductif d'objets gradués de $\underset{\sim}{C}'$; en particulier, si T et T' sont tels que chacun domine l'autre, alors $H^*(T , F)$ et $H^*(T' , F)$ sont canoniquement isomorphes.

Supposons que dans $\underset{\sim}{C}$ les produits fibrés existent, alors on peut, pour $S \in \underset{\sim}{C}$ fixé, appliquer ce qui précède à la catégorie $\underset{\sim}{C}_S$ des objets de $\underset{\sim}{C}$ au-dessus de S, on écrira $C^*(T/S , F)$ et $H^*(T/S , F)$ au lieu de $C^*(T , F)$ et $H^*(T , F)$ si on veut préciser que l'on se place dans la catégorie $\underset{\sim}{C}_S$; ainsi,

$C^*(T/S\ ,\ F)$ est un complexe de cochaînes dans $\underset{\sim}{C}'$ qui, en dimension n est égal à $F(T \times_S T \times_S \dots \times_S T)$ (où la parenthèse comporte $n+1$ facteurs).

Notons que comme d'habitude, on peut définir $H^o(T/S\ ,\ F)$ sans supposer la catégorie $\underset{\sim}{C}'$ abélienne : c'est le noyau (définition 2.1), s'il existe, du couple de morphismes $F(p_i)$ $(i = 1\ ,\ 2)$

$$F(T) \rightrightarrows F(T \times_S T)$$

correspondants aux deux projections $p_1\ ,\ p_2\ :\ T \times_S T \rightrightarrows T$. En particulier, on aura un morphisme naturel (dit d'augmentation)

$$F(S) \longrightarrow H^o(T/S\ ,\ F)$$

qui sera un isomorphisme dans les cas favorables (en particulier si $T \longrightarrow S$ est un épimorphisme strict et si F est "exact à gauche"). De même, lorsque F prend ses valeurs dans la catégorie des groupes dans une catégorie $\underset{\sim}{C}''$, on peut aussi définir $H^1(T/S\ ,\ F)$; dans le cas où $\underset{\sim}{C}''$ est la catégorie des ensembles (i. e. F prend ses valeurs dans la catégorie des groupes ordinaires, non nécessairement commutatifs), $H^1(T\ ,\ F)$ est le quotient du sous-groupe $Z^1(T/S\ ,\ F)$ de $C^1(T/S\ ,\ F) = F(T \times_S T)$ formé des g tels que

$$F(p_{31})(g) = F(p_{32})(g)\ F(p_{21})(g)$$

par le groupe d'opérateurs $F(T)$, opérant sur $C^1(T/S\ ,\ F)$ et en particulier, sur le sous-ensemble $Z^1(T/S\ ,\ F)$ par

$$f(g').g = F(p_2)(g')\, g\, F(p_1)(g')^{-1}$$

b. Soit par exemple $\mathcal{F}$ une catégorie fibrée de base $\underset{\sim}{C}$. Soient $\xi, \eta \in \mathcal{F}_S$, et pour tout S' sur S , soit

$$F_{\xi,\eta}(S') = \mathrm{Hom}\ (\ \xi \times_S S'\ ,\ \eta \times_S S')$$

Ainsi, $F_{\xi,\eta}$ est un foncteur contravariant de $\underset{\sim}{C}_S$ dans la catégorie des ensembles. Ceci posé, <u>dire que le morphisme d'augmentation</u>

$$F_{\xi,\eta}(S) \longrightarrow H^o(S'/S\ ,\ F_{\xi,\eta})$$

<u>est un isomorphisme pour tout couple d'éléments</u> $\xi\ ,\ \eta \in \mathcal{F}_S$, <u>signifie que</u> $\alpha :\ S' \longrightarrow S$ <u>est un morphisme de</u> $\mathcal{F}$<u>-descente</u> (définition 1.7).

c. Posons de même, pour $\xi \in \mathcal{F}_S$ et tout objet S' de $\underset{\sim}{C}$ au-dessus de

$$G_\xi(S') = \mathrm{Aut}\ (\ \xi \times_S S')\ ,$$

on a ainsi défini un foncteur contravariant G_ξ de $\underset{\sim}{C}_S$ dans la catégorie des groupes. Ceci posé, on constate que $Z^1(S'/S , G)$ s'identifie canoniquement à l'ensemble des données de descente sur $\xi' = \xi \times_S S'$ relativement à $S' \longrightarrow S$ (définition 1.6), et $H^1(S'/S , G)$ s'identifie à l'ensemble des classes (à un isomorphisme près) d'objets de $\mathcal{F}_{S'}$ munis d'une donnée de descente relativement à $\alpha : S' \longrightarrow S$, qui, en tant qu'objets de $\mathcal{F}_{S'}$ sont isomorphes à $\xi' = \xi \times_S S'$. Si donc $\alpha : S' \longrightarrow S$ est un morphisme de $\mathcal{F}$-descente (cf. (b)), alors $H^1(S'/S , G)$ contient comme sous-ensemble l'ensemble des classes (à un isomorphisme près) d'objets η de $\mathcal{F}_S$ tels que $\eta \times_S S'$ soit isomorphe dans $\mathcal{F}_{S'}$ à $\xi \times_S S'$; et cette inclusion est une identité si et seulement si toute donnée de descente sur $\xi' = \xi \times_S S'$ relativement à $\alpha : S' \longrightarrow S$ est effective. (Ce sera le cas en particulier si $\alpha : S' \longrightarrow S$ est un morphisme de S-descente strict).

REMARQUE. - Les complexes de cochaînes du type $C^*(T/S , F)$ contiennent comme cas particuliers la plupart des complexes standard connus (cohomologie de Čech, cohomologie des groupes, etc.), et jouent un rôle important en géométrie algébrique, (notamment dans la "cohomologie de Weil" des préschémas).

d. EXEMPLE 1. - Soit S' un objet au-dessus de $S \in \underset{\sim}{C}$, et soit Γ un groupe d'automorphismes de S' tel que S' soit "formellement principal sur S, de groupe Γ", i. e. tel que le morphisme naturel

$$\Gamma \times S' \longrightarrow S' \times_S S' \quad ,$$

où $\Gamma \times S'$ désigne la somme directe de Γ copies de S', soit un isomorphisme. (On suppose que dans $\underset{\sim}{C}$ les sommes directes qui interviennent ici existent). Soit F un foncteur contravariant de $\underset{\sim}{C}$ dans la catégorie des groupes abéliens. Alors $C^*(S'/S , F)$ est canoniquement isomorphe au groupe simplicial de cochaînes standard homogènes $C^*(\Gamma , F(S'))$, donc $H^*(S'/S , F)$ est canoniquement isomorphe à $H^*(\Gamma , F(S'))$.

e. EXEMPLE 2. - Soit $\underset{\sim}{C}$ la catégorie des pré-schémas. On désigne par G_a ("groupe additif") le foncteur contravariant de G dans la catégorie des groupes abéliens, défini par

$$G_a(X) = H^0(X , \underset{\sim}{O}_X) \quad .$$

On définit de même le foncteur G_m ("groupe multiplicatif") par

$$G_m(X) = H^0(X , \underset{\sim}{O}_X)^*$$

(= groupe des éléments inversibles de l'anneau $H^0(X , \underset{\sim}{O}_X)$), et plus généralement le foncteur $Gl(n)$ ("groupe linéaire d'ordre n") par

$$\mathrm{Gl}(n)(X) = \mathrm{Gl}(n\ ,\ H^o(X\ ,\ \underset{\sim}{O}_X))\quad ,$$

qui est un foncteur de $\underset{\sim}{C}$ dans la catégorie des groupes (non nécessairement commutatifs si $n > 1$; pour $n = 1$ on retrouve G_m). On peut d'ailleurs interpréter $\mathrm{Gl}(n)$ comme un foncteur-automorphisme (cf. (c)) en considérant la catégorie fibrée $\mathcal{F}$ de base $\underset{\sim}{C}$ telle que pour $X \in \underset{\sim}{C}$, $\mathcal{F}_X$ soit la catégorie des faisceaux localement libres sur X : on a en effet $\mathrm{Gl}(n)(X) = \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}_X}(\underset{\sim}{O}^n_X)$. D'après (b) il s'ensuit que si $\alpha : S' \longrightarrow S$ est un morphisme de $\mathcal{F}$-descente (cf. paragraphe 2.(c)) $H^1(S'/S\ ,\ \mathrm{Gl}(n))$ contient l'ensemble des classes (à un isomorphisme près) de faisceaux localement libres sur S dont l'image inverse sur S' est isomorphe à $\underset{\sim}{O}^n_{S'}$, et cette inclusion est une égalité si et seulement si toute donnée de descente sur $\underset{\sim}{O}^n_{S'}$ (relativement à $\alpha : S' \longrightarrow S$) est effective. Lorsque S est le spectre d'un anneau local, cela signifie donc $H^1(S'/S\ ,\ \mathrm{Gl}(n)) = (e)$, puisque tout faisceau localement libre sur S est alors trivial.

Notons l'équivalence des conditions suivantes sur un morphisme $\alpha : S' \longrightarrow S$:

(i). L'homomorphisme d'augmentation $H^o(S\ ,\ \underset{\sim}{O}_S) = G_a(S) \longrightarrow H^o(S'/S\ ,\ G_a)$ est un isomorphisme

(ii). $S' \longrightarrow S$ est un morphisme de $\mathcal{F}$-descente ($\mathcal{F}$ étant la catégorie fibrée de base $\underset{\sim}{C}$ envisagée ci-dessus).

Si $S' \longrightarrow S$ est fini, ces conditions équivalent aussi à

(iii). $S' \longrightarrow S$ est un épimorphisme strict (cf. paragraphe 2.(c)).

Supposons maintenant que $S = \mathrm{Spec}\ (A)$, $S' = \mathrm{Spec}\ (A')$; alors on a

$$C^n(S'/S\ ,\ G_a) = C^n(A'/A\ ,\ G_a) = \overset{n+1}{\otimes_A} A'$$

l'opérateur cobord $C^n(A'/A\ ,\ G_a) \longrightarrow C^{n+1}(A'/A\ ,\ G_a)$ étant somme alternée des opérateurs faces

$$\partial_i(x_o \otimes x_1 \otimes \dots \otimes x_n) = x_o \otimes \dots \otimes x_{i-1} \otimes 1_{A'} \otimes x_i \otimes \dots \otimes x_n$$

De même, $C^n(S'/S\ ,\ G_m) = C^n(A'/A\ ,\ G_m)$ s'identifie à $(\overset{n+1}{\otimes_A} A')^*$, les opérations simpliciales dans $C^*(A'/A\ ,\ G_m)$ étant induites par celles de $C^*(S'/S\ ,\ G_a)$. On explicite de même les opérations simpliciales dans $C^*(A'/A\ ,\ \mathrm{Gl}(n))$. <u>Dans tous les cas à la connaissance du conférencier, on a</u> $H^i(A'/A\ ,\ G_a) = 0$ <u>pour</u> $i > 0$, <u>et si</u> A <u>est local, on a</u> $H^1(A'/A\ ,\ G_m) = 0$ <u>et plus généralement</u> $H^1(A'/A\ ,\ \mathrm{Gl}(n)) = (e)$ (lorsque $S' \longrightarrow S$ est un morphisme de $\mathcal{F}$-descente, i. e. le diagramme $A \longrightarrow A' \rightrightarrows A' \otimes_A A'$ est exact, comparer avec le paragraphe 2.(c)). On notera que <u>le "théorème 90"</u> de Hilbert <u>n'est autre que la relation</u>

$H^1(S'/S\ ,\ G_m) = 0$ lorsque A est un corps et A' une extension galoisienne finie de ce dernier (cf. exemple 1), et peut encore s'exprimer en disant que dans le cas envisagé, $S' \longrightarrow S$ est un morphisme de descente strict pour la catégorie fibrée des faisceaux localement libres de rang 1 . C'est sous cette dernière forme qu'il convient de généraliser le théorème de Hilbert, en variant les hypothèses aussi bien sur le morphisme $S' \longrightarrow S$ que sur les faisceaux quasi-cohérents envisagés.

Notons enfin l'équivalence des propriétés suivantes, lorsque A est un anneau local artinien d'idéal maximal m , A' une A-algèbre (en désignant, pour tout entier $k > 0$, par A_k (resp. A'_k) les anneaux A/m^{k+1} (resp. $A'/m^{k+1}A'$)) :

(i). $H^1(A'_k/A_k\ ,\ G_a) = 0$ pour tout k .

(ii). $H^1(A'_k/A_k\ ,\ G_m) = 0$ pour tout k .

(iii). $H^1(A'_k/A_k\ ,\ Gl(n)) = (e)$ pour tout k et tout n .

Si $S' \longrightarrow S$ est un épimorphisme strict, alors les conditions précédentes impliquent même que c'est un morphisme de descente strict pour les modules libres (de type fini ou non) sur A' .

REMARQUE. - La définition des groupes $H^i(S'/S\ ,\ G_m)$, dans le cas ou S , S' sont des schémas de corps A , A' , est due à AMITSUR. Le groupe $H^2(S'/S\ ,\ G_m)$ est particulièrement intéressant comme variante "globale" du groupe de Brauer, variante pour laquelle on pourra se référer à [1], chapitre VII.

B. Descente par morphismes fidèlement plats.

1. Enoncé des théorèmes de descente.

DÉFINITION 1.1. - Un morphisme $\alpha : S' \longrightarrow S$ de pré-schémas est dit plat si pour tout $x' \in S'$, $\underline{O}_{x'}$ est un module plat sur l'anneau $\underline{O}_{\alpha(x')}$ (i. e. $\underline{O}_{x'} \otimes_{O_{\alpha(x')}} M$ est un foncteur exact en le $O_{\alpha(x')}$-module M). Un morphisme est dit fidèlement plat s'il est plat et surjectif.

Par exemple, si $S = \mathrm{Spec}\ (A)$, $S' = \mathrm{Spec}\ (A')$, alors S' est plat sur S si et seulement si A' est un A-module plat, et S' est fidèlement plat sur S si et seulement si A' est un A-module fidèlement plat (i. e. le foncteur $A' \otimes_A M$ en le A-module M est exact et fidèle) ; cela signifie aussi, dans la terminologie de SERRE [5], que le couple $(A\ ,\ A')$ est plat. Si S' est fidèlement plat sur S , alors le foncteur image inverse de faisceaux quasi-cohérents sur S est exact et fidèle, en d'autres termes, pour qu'une suite d'homomorphismes de faisceaux quasi-cohérents sur S soit exacte, il faut et il suffit que son image réciproque sur S' le soit (en particulier, pour qu'un homomorphisme de faisceaux quasi-cohérents sur S soit un monomorphisme, resp. un épimorphisme, resp. un isomorphisme, il faut et il suffit que son image inverse sur S' le soit). Cette propriété reste vraie si on se restreint au-dessus d'un ouvert quelconque de S, et sous cette forme caractérise les morphismes fidèlement plats.

DÉFINITION 1.2. - Un morphisme $\alpha : S' \longrightarrow S$ est dit quasi-compact si l'image inverse de toute partie ouverte quasi-compacte U de S est quasi-compacte (i. e. réunion finie d'ouverts affines).

Il suffit évidemment de vérifier cette propriété pour les ouverts affines de S. Par exemple, un morphisme affine (i. e. tel que l'image inverse d'un ouvert affine soit affine) est quasi-compact.

La classe des morphismes plats, resp. fidèlement plats, resp. quasi-compacts, est stable par composition et par "extension de la base", et contient bien entendu les isomorphismes.

THÉORÈME 1. - Soit $\alpha : S' \longrightarrow S$ un morphisme de pré-schémas, fidèlement plat et quasi-compact. Alors α est un morphisme de descente strict (A, définition 1.7) pour la catégorie fibrée $\mathcal{F}$ des faisceaux quasi-cohérents (A, paragraphe 1, exemple 2).

Cet énoncé signifie deux choses :

(i) Si F et G sont deux faisceaux quasi-cohérents sur S, F' et G' leurs images inverses sur S', alors l'homomorphisme naturel

$$\mathrm{Hom}\,(F\,,\,G) \longrightarrow \mathrm{Hom}\,(F'\,,\,G')$$

est une bijection du premier membre sur le sous-groupe du second formé des homomorphismes $F' \longrightarrow G'$ qui sont compatibles avec les données de descente canoniques sur ces faisceaux, i. e. dont les images inverses par les deux projections de $S'' = S' \times_S S'$ sur S' donnent un même homomorphisme $F'' \longrightarrow G''$.

(ii) Tout faisceau quasi-cohérent F' sur S', muni d'une donnée de descente relativement au morphisme $\alpha : S' \longrightarrow S$ (A, définition 1.6), est isomorphe (muni de cette donnée) à l'image inverse d'un faisceau quasi-cohérent F sur S.

Faisant $F = \underline{O}_S$ dans (i), on trouve :

COROLLAIRE 1. - Soit G un faisceau quasi-cohérent sur S, soient G' et G'' ses images inverses sur S' et sur $S'' = S' \times_S S'$, soient p_1, p_2 les deux projections de S'' sur S', alors le diagramme suivant d'applications d'ensembles

$$\Gamma(G) \xrightarrow{\alpha^*} \Gamma(G') \overset{p_1^*}{\underset{p_2^*}{\rightrightarrows}} \Gamma(G'')$$

est <u>exact</u> (A, définition 1.(a)).

D'autre part, la conjonction de (i), (ii) et de la définition 1.1 donne le

COROLLAIRE 2. - Soit G comme dans le corollaire 1. Alors il y a correspondance biunivoque entre les sous-faisceaux quasi-cohérents de G , et les sous-faisceaux quasi-cohérents de G' dont les images inverses sur G'' , par les deux projections p_1 , p_2 , donnent le même sous-faisceau de G'' .

Bien entendu, on a un énoncé équivalent en termes de faisceaux quotients. Comme on l'a vu (A, paragraphe 4, (e)), le théorème 1 doit être considéré comme une généralisation du "théorème 90" de Hilbert, et implique comme cas particuliers diverses formulations en termes de 1-cohomologie. Pour la démonstration, on est ramené facilement au cas où $S = \mathrm{Spec}\ (A)$, $S' = \mathrm{Spec}\ (A')$, et pour (i) on se ramène facilement à prouver le corollaire 1, i. e. l'exactitude du diagramme

$$M = A \otimes_A M \longrightarrow A' \otimes_A M \rightrightarrows A' \otimes_A A' \otimes_A M$$

pour tout A-module M , ce qui résulte du lemme plus général :

LEMME 1.1. - Soit A' une A-algèbre fidèlement plate. Alors pour tout A-module M , le complexe M-augmenté $C^*(A'/A\ , G_a) \otimes_A M$ (cf. A, paragraphe 4, (e)) est une <u>résolution</u> de M .

Il suffit de prouver que le complexe augmenté déduit du précédent par extension de la base de A à A' satisfait les mêmes conclusions. Cela amène à vérifier l'énoncé quand on remplace A par A' et A' par $A' \otimes_A A'$, donc nous ramène à un cas où il existe un homomorphisme de A-algèbres $A' \longrightarrow A$ (ou, en termes géométriques, au cas ou S' sur S admet une section). Dans ce cas, cela résulte des généralités du A, paragraphe 4, (a). Signalons en passant le corollaire suivant, qui généralise un énoncé bien connu en cohomologie de Galois (comparer A, paragraphe 4, (e)) :

COROLLAIRE. - Si A' est fidèlement plat sur A , on a $H^0(A'/A\ , G_a) = A$ et $H^i(A'/A\ , G_a) = 0$ pour $i \geq 1$.

Pour prouver la partie (ii) du théorème 1, on procède comme pour (i) en se ramenant au cas où S' sur S admet une section, où cela résulte de (i) (cf. A, paragraphe 1, (c)).

On peut évidemment varier ad libitum le théorème 1 et ses corollaires en introduisant des structures supplémentaires diverses sur les faisceaux (ou systèmes de faisceaux) quasi-cohérents envisagés. Par exemple, la donnée sur S d'un faisceau quasi-cohérent d'algèbres commutatives "équivaut" à la donnée sur S' d'un tel faisceau, muni d'une donnée de descente relativement à $\alpha : S' \longrightarrow S$. Compte tenu de la correspondance fonctorielle entre de tels faisceaux quasi-cohérents sur S, et des pré-schémas affines au-dessus de S, on obtient la deuxième assertion du théorème suivant :

THÉORÈME 2. - Soit $\alpha : S' \longrightarrow S$ comme dans le théorème 1. Alors α est un morphisme de descente (non strict en général) (A définition 2.4), et c'est un morphisme de descente strict pour la catégorie fibrée des schémas, affines au-dessus de pré-schémas, (A, définition 1.7).

La première assertion du théorème signifie ceci : soient X, Y deux pré-schémas au-dessus de S, X', Y' leurs images inverses sur S' et X'', Y'' leurs images inverses sur $S'' = S' \times_S S'$, alors le diagramme suivant d'applications naturelles

$$\mathrm{Hom}_S(X , Y) \xrightarrow{\alpha^*} \mathrm{Hom}_{S'}(X' , Y') \underset{p_2^*}{\overset{p_1^*}{\rightrightarrows}} \mathrm{Hom}_{S''}(X'' , Y'')$$

est exact, i. e. α^* est une bijection de $\mathrm{Hom}_S(X , Y)$ sur la partie de $\mathrm{Hom}_{S'}(X' , Y')$ formé des homomorphismes qui sont compatibles avec les données de descente canoniques sur X', Y' (i. e. dont les images inverses par les deux projections de S'' sur S' sont égales). Cela résulte facilement du théorème 1, corollaire 1, lorsqu'on se borne à Y affine sur S ; dans le cas général, il faut conjuguer le théorème 1 avec le résultat suivant :

LEMME 1.2. - Soit $\alpha : S' \longrightarrow S$ un morphisme fidèlement plat et quasi-compact. Alors S s'identifie à un espace topologique quotient de S', i. e. toute partie U de S telle que $\alpha^{-1}(U)$ soit ouverte, est ouverte.

Pour compléter le théorème 2, il faut donner des critères d'effectivité pour une donnée de descente sur un S'-pré-schéma X' (dans le cas ou X' n'est pas supposé affine sur S'). Remarquons d'abord qu'une telle donnée de descente n'est pas nécessairement effective, même si S est le spectre d'un corps k, S' le spectre d'une extension quadratique k' de ce dernier, et S' un schéma algébrique propre de dimension 2 sur S' (comme on peut voir, d'après SERRE, en utilisant la surface non projective de NAGATA). Pour qu'une donnée de descente sur X'/S' relativement à $\alpha : S' \longrightarrow S$ (fidèlement plat et quasi-compact) soit effective, il faut et il suffit que X' soit réunion d'ouverts X'_i, affines sur S', qui soient "stables" par la donnée de descente sur X'. Il en est certainement ainsi (quel que soit X'/S' et la donnée de descente sur X') si le morphisme $\alpha : S' \longrightarrow S$ est radiciel (i. e. injectif, et à extensions résiduelles qui sont radicielles). On peut montrer aussi qu'il en est encore ainsi si $\alpha : S' \longrightarrow S$ est <u>fini</u>, et toute partie finie de X', contenue dans une fibre de X' sur S, est contenue dans un ouvert de X' affine sur S (c'est le <u>critère de Weil</u>). Il en est en particulier ainsi, si X'/S' est quasi-projectif, et dans ce cas, on peut montrer que le pré-schéma "descendu" X/S est aussi quasi-projectif (et projectif si X'/S' l'est). En résumé :

THÉORÈME 3. - Soit $\alpha : S' \longrightarrow S$ un morphisme de pré-schémas, fidèlement plat et quasi-compact. Si α est <u>radiciel</u>, c'est un <u>morphisme de descente strict</u>. Si α est fini, c'est un morphisme de descente strict relativement à la catégorie fibrée des pré-schémas quasi-projectifs (ou projectifs) sur des pré-schémas.

REMARQUES. - J'ignore si, dans la deuxième assertion ci-dessus, l'hypothèse que α soit un morphisme <u>fini</u> est bien nécessaire ; on vérifie en tous cas de façon "formelle" qu'on peut la remplacer par l'hypothèse suivante, plus faible en apparence : <u>pour tout point de</u> S <u>existe un voisinage ouvert</u> U, <u>un</u> U' <u>fini et fidèlement plat sur</u> U, <u>et un</u> S<u>-morphisme de</u> U' <u>dans</u> S'. Un cas type qui ne rentre pas dans le précédent est celui où $S = \mathrm{Spec}(A)$, $S' = \mathrm{Spec}(\bar{A})$, où A est un anneau local noethérien et $\bar{A}$ son complété ; ou encore celui où S' est quasi-fini sur S (i. e. localement isomorphe à un ouvert d'un S-schéma fini) et non fini. Dans ces deux cas, le conférencier ignore aussi la réponse à la question suivante : soit X un S-schéma tel que $X' = X \times_S S'$ soit projectif sur S', est-il vrai que X est projectif sur S ?

2. <u>Application à la descente de certaines propriétés de morphismes</u>. - Soit P une classe de morphismes de pré-schémas. Soit $\alpha : S' \longrightarrow S$ un morphisme de pré-schémas, et soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de S-pré-schémas, $f' : X' \longrightarrow Y'$ l'image réciproque de f par α. On peut se demander alors si la relation " $f' \in P$ " implique " $f \in P$ ". Il apparaît que la réponse est affirmative dans beaucoup de cas importants lorsque l'on suppose que α est <u>fidèlement plat</u> et <u>quasi-compact</u> (cette dernière hypothèse étant parfois surabondante). Cela se voit directement sans difficulté si P est la classe des morphismes surjectifs, resp. radiciels (ces cas résultant de la surjectivité de α), resp. plats, resp. fidèlement plats, resp. simples (ces cas résultant de la fidèle platitude de α), resp. de type fini. Utilisant les théorèmes 1, 2 et le lemme 1.2, on voit aussi qu'il en est de même si P est une des classes suivantes : isomorphismes, immersions ouvertes, immersions fermées, immersions (si f est de type fini et Y localement noethérien), morphismes affines, morphismes finis, morphismes quasi-finis, morphismes ouverts, morphismes fermés, homéomorphismes, morphismes séparés,

morphismes propres. Le seul cas important non élucidé est celui des morphismes projectifs et quasi-projectifs, déjà signalé dans la remarque du paragraphe 1.

3. <u>Descente par morphismes finis fidèlement plats.</u> - Soit $\alpha : S' \longrightarrow S$ un morphisme <u>fini</u>, correspondant à un faisceau d'algèbres $\underline{A}'$ sur S qui est <u>localement libre</u> de type fini en tant que faisceau de modules, et partout $\neq 0$, alors α est un morphisme fidèlement plat et quasi-compact, auquel on peut donc appliquer les résultats précédents. La donnée d'un faisceau quasi-cohérent F' sur S' équivaut à la donnée du faisceau quasi-cohérent $\alpha_*(F')$ sur S, muni de sa structure de $\underline{A}'$-module (notant que $\underline{A}' = \alpha_*(\underline{O}_{S'})$). Pour simplifier, ce faisceau sur S sera également noté F'. Les deux images inverses $p_i^*(F')$ de F' sur $S' \times_S S'$ correspondent de même aux faisceaux quasi-cohérents de $(\underline{A}' \otimes_{\underline{O}_S} \underline{A}')$-modules $F' \otimes_{\underline{O}_S} \underline{A}'$ et $\underline{A}' \otimes_{\underline{O}_S} F'$. La donnée d'un $(S' \times_S S')$-homomorphisme du premier dans le second équivaut à la donnée d'un homomorphisme de $(\underline{A}' \otimes \underline{A}')$-module, et compte tenu que $\underline{A}'$ est localement libre, cela équivaut à la donnée d'un homomorphisme de $(\underline{A}' \otimes \underline{A}')$-modules :

$$\underline{U} = \underline{Hom}_{\underline{O}_S}(\underline{A}', \underline{A}') = \underline{A}' \otimes \check{\underline{A}}' \longrightarrow \underline{Hom}_{\underline{O}_S}(F', F')$$

i. e. à la donnée, pour toute section ξ de $\underline{U}$ sur un ouvert V, d'un homomorphisme de $\underline{O}_S$-modules $T_\xi : F'|V \longrightarrow F'|V$, satisfaisant les conditions

(3.1) $$T_{f\xi}(x) = fT_\xi(x) \qquad T_{\xi f}\, x = T_\xi(fx)$$

où f, x sont respectivement des sections de $\underline{A}'$, F' sur un ouvert de S contenu dans V. Les conditions (i) et (ii) d'une donnée de descente (A, paragraphe 1, (c)) s'écrivent alors respectivement :

(3.2) $$T_{1_U}\, x = x\,, \qquad \text{i. e.} \qquad T_{1_U} = \mathrm{id}_{F'}$$

(3.3) $$T_{\xi\eta} = T_\xi\, T_\eta\,.$$

En d'autres termes, <u>une donnée de descente sur</u> F' <u>équivaut à une représentation du faisceau de</u> $\underline{O}_S$<u>-algèbres</u> $\underline{U} = \underline{Hom}_{\underline{O}_S}(\underline{A}', \underline{A}')$ <u>dans le faisceau de</u> $\underline{O}_S$<u>-algèbres</u> $\underline{Hom}_{\underline{O}_S}(F', F')$, <u>satisfaisant les deux conditions de linéarité</u> (3.1). Si on a un accouplement de faisceaux quasi-cohérents sur S' :

$$F'_1 \times F'_2 \longrightarrow F'_3$$

(qu'on peut interpréter comme un accouplement de faisceaux de $\underline{A}'$-modules sur S);

et des données de recollement sur les F'_i , définies par des homomorphismes T_i ($i = 1, 2, 3$) $\underset{\sim}{U} \longrightarrow \underset{\sim}{Hom}_{\underset{\sim}{O}_S}(F'_i, F'_i)$, alors ces données sont compatibles avec l'accouplement donné, dans le sens évident du terme, si et seulement si la condition suivante est vérifiée :

Pour toute section ξ de $\underset{\sim}{U}$ sur un ouvert, désignant par $\Delta\xi = \sum \xi'_i \otimes_{A'} \xi''_i$ la section de $\underset{\sim}{U} \otimes_{\underset{\sim}{A}'} \underset{\sim}{U}$ ($\underset{\sim}{U}$ étant considéré comme $\underset{\sim}{A}'$-module pour sa structure à gauche) défini par la formule

$$\xi.(fg) = \sum_i \xi'_i(f)\, \xi''_i(g)$$

(ou f et g sont deux sections de $\underset{\sim}{A}'$ sur un ouvert plus petit), on a la formule

$$T^{(3)}_{\xi}(x.y) = \sum_i T^{(1)}_{\xi'_i}\, x.T^{(2)}_{\xi''_i}\, y \tag{3.4}$$

pour tout couple de sections x , y de $\underset{\sim}{A}'$ sur un ouvert plus petit. (On pourra exprimer cette propriété en disant que les homomorphismes $T^{(i)}$ sont compatibles avec l'application diagonale de $\underset{\sim}{U}$, relativement à l'accouplement donné). En particulier, les formules (3.1) à (3.4) nous permettent d'interpréter en termes de représentations d'algèbres à applications diagonales, les données de descente sur un faisceau quasi-cohérent d'algèbres sur S' , donc aussi (se restreignant aux algèbres commutatives) les données de descente sur un S'-schéma affine.

De là, on passe à une interprétation analogue des données de descente sur un S'-pré-schéma X' quelconque : la donnée d'un tel X' équivaut à la donnée d'un pré-schéma X' sur S , muni d'un homomorphisme de $\underset{\sim}{O}_S$-algèbres

$$\underset{\sim}{A}' \longrightarrow \underset{\sim}{O}_{X'}$$

et une donnée de descente sur X' équivaut à la donnée d'un homomorphisme de faisceaux (compatible avec le morphisme $h : X' \longrightarrow S'$) :

$$\underset{\sim}{U} \longrightarrow \underset{\sim}{Hom}_{h^{-1}(\underset{\sim}{O}_S)}(\underset{\sim}{O}_{X'}, \underset{\sim}{O}_{X'})$$

satisfaisant les conditions analogues aux conditions (3.1) à (3.4) ci-dessus.

EXEMPLE 1 ("WEIL"). - Supposons S'/S un revêtement étale galoisien de groupe de Galois Γ (cf. A, paragraphes 3, et 4, (d)). Alors une donnée de descente sur un faisceau quasi-cohérent F' sur S' (resp. sur un S'-pré-schéma X') équivaut à la donnée d'une représentation de Γ par automorphismes de (S', F') (resp. de (S', X')) compatible avec les opérations de Γ sur S' . Ce résultat est "formel", i. e. se démontre en termes de catégories, mais du point de vue de ce numéro résulte aussi de la structure explicite de $\underset{\sim}{U}$, (muni de sa structure d'anneau, l'homomorphisme d'anneaux $\underset{\sim}{A}' \longrightarrow \underset{\sim}{U}$ et l'application diagonale), complètement connue grâce au résultat suivant : $\underset{\sim}{U}$ admet, en tant que A'-module à gauche, une base formée des sections de $\underset{\sim}{U}$ qui correspondent aux éléments de Γ.

EXEMPLE 2 ("CARTIER"). - Soit p un nombre premier, supposons $p\underset{\sim}{O}_S = 0$ (i. e. $\underset{\sim}{O}_S$ est de caractéristique p), $\underset{\sim}{A}'^p \subset \underset{\sim}{O}_S = \underset{\sim}{A}$ (i. e. S'/S est radiciel de hauteur 1) et que le faisceau d'algèbres $\underset{\sim}{A}'$ sur $\underset{\sim}{A}$ admet localement une p-base, i. e. une famille (x_i) de sections telle que $\underset{\sim}{A}'$ soit engendré comme algèbre par les x_i, soumis aux seules conditions $x_i^p = 0$. Nous supposons l'ensemble des i fini, de cardinal n. Soit $\mathcal{G}$ le faisceau des A-dérivations de A', c'est un faisceau de A'-modules localement libre de rang n, de plus c'est un faisceau de p-algèbres de Lie sur $\underset{\sim}{A}$ (mais non sur $\underset{\sim}{A}'$) satisfaisant la condition

$$[X , fY] = X(f)\, Y + f[X , Y] \tag{3.5}$$

LEMME. - $\underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{Hom}_{\underset{\sim}{O}_S}(\underset{\sim}{A}' , \underset{\sim}{A}')$ est engendré, en tant que $\underset{\sim}{O}_S$-algèbre muni d'un homomorphisme d'algèbres $\underset{\sim}{A}' \longrightarrow \underset{\sim}{U}$, par le sous-$A'$-module à gauche $\mathcal{G}$, avec les relations supplémentaires :

$$\left\{\begin{array}{l} Xf - fX = X(f) \\ XY - YX = [X , Y] \\ X^p = X^{(p)} \end{array}\right. \tag{3.6}$$

Il résulte du lemme précédent qu'une donnée de descente sur le faisceau quasi-cohérent F' sur S' équivaut à la donnée, pour tout $X \in \mathcal{G}$, d'un $\underset{\sim}{O}_S$-endomorphisme $\bar{X}$ de F', satisfaisant les conditions

$$\overline{fX} = f\bar{X} \tag{3.7}$$

$$\bar{X}(fx) = X(f)\, x + f\bar{X}(x) \tag{3.8}$$

$$\overline{[X , Y]} = [\bar{X} , \bar{Y}] \tag{3.9}$$

$$\overline{X^{(p)}} = \bar{X}^p \tag{3.10}$$

(C'est ce qu'on pourrait appeler une connexion linéaire sur F', sans courbure et compatible avec la puissance p-ième). On explicite de même la notion de donnée de descente sur un S'-pré-schéma X', la relation (3.4) est remplacée ici par la condition que les $\bar{X}$ sont des dérivations de $\underset{\sim}{O}_{X'}$. Comme le morphisme $S' \longrightarrow S$ est radiciel, le théorème 3 garantit que toute telle donnée de descente est effective, donc définit un S-pré-schéma X .

On notera qu'on n'a pas eu à faire d'hypothèse de platitude, de non singularité ou de finitude quelconque sur F' resp. X' .

4. Application à des critères de rationalité. - Soit X un S-pré-schéma tel que l'image directe de $\mathcal{O}_X$ sur S soit $\mathcal{O}_S$; cette propriété restera vraie alors par toute extension plate $S' \longrightarrow S$ de la base S . Si F est un faisceau inversible (i. e. localement libre de rang 1) sur X , les automorphismes de F , s'identifiant aux sections inversibles de $\mathcal{O}_X$, correspondent biunivoquement aux sections inversibles de $\mathcal{O}_S$. Soit alors s une section de X au-dessus de s ; nous appellerons de façon imagée, section de F au-dessus de s , une section du faisceau inversible $s^*(F)$ sur S . Il résulte de ce qui précède que si F_i ($i = 1$, 2) sont deux faisceaux inversibles sur X , munis chacun d'une section au-dessus de s , et si F_1 et F_2 sont isomorphes, il existe un isomorphisme et un seul de F_1 sur F_2 compatible avec les sections en question (i. e. transformant la première en la seconde). D'ailleurs, et indépendamment de la section s , convenons de regarder comme équivalents deux faisceaux inversibles F_1 et F_2 sur X tel que tout point de S ait un voisinage ouvert U tel que les restrictions de F_1 et F_2 à $X|U$ soient isomorphes. Alors tout faisceau inversible F sur X est équivalent à un faisceau inversible F_1 muni d'une section marquée au-dessus de s (on prend $F_1 = Fs^*(F)^{-1}$), et F_1 est déterminé à un isomorphisme près. En d'autres termes, la classification des faisceaux inversibles sur X à une équivalence près est la même que la classification à un isomorphisme près des faisceaux inversibles munis d'une section marquée.

Comme ces propriétés restent vraies par extension plate $\alpha : S' \longrightarrow S$ de la base, (en remplaçant la section s par son image inverse s' par α), on en conclut, compte tenu du théorème 1 :

Le pré-schéma X/S étant comme ci-dessus et admettant une section s , soit $\alpha : S' \longrightarrow S$ un morphisme fidèlement plat et quasi-compact ; soit F' un faisceau inversible sur $X' = X \times_S S'$. Pour que F' soit équivalent à l'image inverse sur X' d'un faisceau inversible F sur X , il faut et il suffit que ses images inverses $p_1^*(F')$ et $p_2^*(F')$ sur $X' \times_X X' = X \times_S (S' \times_S S')$ soient équivalentes. S'il en est ainsi, F est déterminé à une équivalence près. (On dira alors que F' est rationnel sur S).

S'inspirant de ce principe dans le cas où $\alpha : S' \longrightarrow S$ est comme dans l'exemple 1 ou l'exemple 2 du numéro précédent, on trouve les critères de rationalité de Weil ou de Cartier. (On notera que ses auteurs se bornent au cas ou S et S'

sont des spectres de corps ; a fortiori, S est alors le spectre d'un anneau local, et la relation d'équivalence introduite ci-dessus n'est autre que la relation d'isomorphie). Dans le premier cas, F' est rationnel sur S si et seulement si ses transformés par Γ sont équivalents à F'. Pour exprimer le critère de rationalité dans le deuxième cas, on considère, de façon générale, le morphisme diagonal $X' \longrightarrow X'' = X' \times_X X'$ de X'/X, le faisceau d'idéaux $\underset{\sim}{I}$ correspondant sur $X' \times_X X'$ et le faisceau $\underset{\sim}{I}/\underset{\sim}{I}^2$, qui s'identifie à son image réciproque $\Omega^1_{X'/X}$ sur X (*faisceau des* *1-différentielles de* X' *par rapport à* X). Comme les restrictions des $F''_i = p_i(F')$ $(i = 1\ ,\ 2)$ à la diagonale sont isomorphes (car isomorphes à F'), i. e. $F''_1 {F''_2}^{-1} = F''$ a une restriction à la diagonale qui est triviale, il s'ensuit que la restriction de F'' à $(X''\ ,\ \underset{\sim}{O}_{X''}/\underset{\sim}{I}^2)$ est donnée, à un isomorphisme près, par un élément bien déterminé ξ de

$$H^1(X''\ ,\ \underset{\sim}{I}/\underset{\sim}{I}^2) = H^1(X'\ ,\ \Omega^1_{X'/X})$$

D'ailleurs, en l'occurence, on a $\Omega^1_{X'/X} = \Omega^1_{S'/S} \otimes_{\underset{\sim}{O}_S} \underset{\sim}{O}_X$, et par suite, *si* $\Omega^1_{S'/S}$ *est localement libre sur* S (comme dans le cas de Cartier), ξ *définit une section* *de* $R^1 f'(\underset{\sim}{O}_{X'}) \otimes \Omega^1_{S'/S}$ *sur* S' (appelée *classe de* Atiyah-Cartier *du faisceau inversible* F' *sur* X'/S) *dont l'annulation est nécessaire et suffisante pour que les images réciproques de* F' *par les deux projections de*

$$(X''\ ,\ \underset{\sim}{O}_{X''}/\underset{\sim}{I}^2) = X \times_S (S''\ ,\ \underset{\sim}{O}_{S''}/\underset{\sim}{J}^2)$$

sur X' *soient équivalentes* (où $\underset{\sim}{J}$ est le faisceau d'idéaux sur $S'' = S' \times_S S'$ défini par le morphisme diagonal $S' \longrightarrow S' \times_S S'$). Cette annulation est donc trivialement *nécessaire* pour que les images réciproques de F' sur $X'' = X \times_S S''$ lui-même soient équivalentes, donc aussi pour que F soit équivalent à l'image inverse d'un faisceau inversible F sur X. D'ailleurs, la classe de Atiyah- Cartier peut aussi s'interpréter comme l'obstruction à l'existence, localement au-dessus de S', d'une *connexion* de F' relativement aux dérivations de X'/X, une telle connexion étant de plus déterminée quand on connait les dérivations de F' correspondant aux prolongements naturels à X' des dérivations de S'/S. De ceci, et des développements du numéro précédent, on conclut facilement que dans le cas de l'exemple 2 dudit, et lorsque X/S admet une section, l'annulation de la classe de Atiyah-Cartier est aussi suffisante pour que F' soit rationnelle sur S.

5. *Application à la restriction du schéma de base dans un schéma abélien.* - Soit S un pré-schéma. On appelle *schéma abélien* sur S un schéma X simple et propre

sur S dont les fibres en les points $x \in S$ sont des schémas de variétés abéliennes sur les $\varkappa(x)$. Supposons S noethérien et régulier (i. e. ses anneaux locaux réguliers), alors on peut montrer en utilisant le théorème de connexion de MURRE [4] (du moins dans le cas "d'égales caractéristiques", ou le théorème cité est actuellement démontré) que toute section rationnelle de X sur S est partout définie (i. e. est une section) (ce qui généralise un théorème classique de WEIL). Il en résulte, plus généralement que si X' est un schéma simple sur S, alors toute S-application rationnelle de X' dans X est partout définie. Il en résulte ceci, qui généralise un résultat de IGUSA-LANG : S étant noethérien et régulier et K désignant son anneau des fonctions rationnelles (composé direct de corps), soit X un schéma abélien au-dessus de K ; si X est isomorphe à un K-schéma de la forme $X_0 \times_S \operatorname{Spec}(K)$, où X_0 est un schéma abélien sur S, alors X_0 est déterminé à un isomorphisme unique près.

Utilisant le résultat d'unicité précédent, on voit que la question de restriction de la base dans X est locale sur S (et par suite, qu'il suffit de savoir faire la restriction aux $\operatorname{Spec}(\underline{O}_x)$, avec $x \in S$). On voit de la même façon que si $S' \longrightarrow S$ est un morphisme simple de type fini, si K' est l'anneau des fonctions rationnelles de S', et si $X \otimes_K K'$ est de la forme $X'_0 \times_{S'} \operatorname{Spec}(K')$, alors X'_0 est muni d'une donnée de descente canonique relativement à α. Compte tenu du théorème 3, on en conclut :

PROPOSITION 5.1. - Soit S un pré-schéma noethérien et régulier, irréductible, de corps de fonctions rationnelles K, soit K' une extension finie de K, non ramifiée sur S, S' le normalisé de S dans K' (qui est donc un revêtement étale de S), X un schéma abélien sur K tel que $X \otimes_K K'$ soit de la forme $X'_0 \times_{S'} \operatorname{Spec}(K')$, où X'_0 est un schéma abélien projectif sur S'. Alors X est de la forme $X_0 \times_S \operatorname{Spec}(K)$, où X_0 est un schéma abélien projectif sur S.

REMARQUES. - Le conférencier ignore si on peut remplacer l'hypothèse que $S' \longrightarrow S$ est un révêtement étale surjectif (permettant d'utiliser le théorème 3) par l'hypothèse que c'est un morphisme de type fini simple et surjectif (même si on suppose que c'est un étalement), ou si la proposition reste valable sans supposer X'_0 projectif sur S' (condition qui est peut-être remplie automatiquement).

6. Application à des critères de locale trivialité et isotrivialité. - Soient S un pré-schéma, G un "pré-schéma en groupes" au-dessus de S, P un pré-schéma sur S sur lequel "G opère" (à droite). On dit que P est formellement principal homogène sous G si le morphisme bien connu

$$G \times_S P \longrightarrow P \times_S P$$

déduit des opérations de G sur P, est un ~~isomorphisme~~. Nous supposerons dorénavant G plat sur S (donc fidèlement plat sur S), et nous réserverons le nom de fibré principal homogène sous G à un fibré formellement principal homogène P qui est fidèlement plat et quasi-compact sur S. Il est immédiat qu'il revient au même de dire que l'on peut trouver une extension fidèlement plate et quasi-compacte $S' \longrightarrow S$ de la base S, telle que le fibré formellement principal homogène $P' = P \times_S S'$ sous $G' = G \times_S S'$ soit trivial, i. e. isomorphe à G' (i. e. admette une section) ; on pourra prendre en particulier $S' = P$. Noter d'ailleurs que si S est localement noethérien, alors l'hypothèse de fidèle platitude sur P équivaut à l'hypothèse que $\bar{P}_s = P \times_S \operatorname{Spec}(\bar{\mathcal{O}}_s)$ est fidèlement plat sur $\bar{\mathcal{O}}_s$ pour tout $s \in S$ (où $\bar{\mathcal{O}}_s$ désigne le complété de l'anneau local $\mathcal{O}_s$), comme il résulte du fait que $\bar{\mathcal{O}}_s$ est fidèlement plat sur $\mathcal{O}_s$. D'ailleurs, si P est de type fini sur S localement noethérien, l'ensemble des points s satisfaisant à la condition ci-dessus est constructible, donc si S est un "pré-schéma de Jacobson" (par exemple un schéma de type fini sur un corps, ou un anneau de Jacobson plus généralement), il suffit de vérifier la condition en question pour les points fermés de S. Cela nous ramène au cas où la base est le spectre d'un anneau local complet A. Lorsque $S = \operatorname{Spec}(A)$ (A anneau local noethérien complet) et que P est de type fini sur S, la fidèle platitude de P/S équivaut aussi à l'existence d'un S' fini et plat sur S tel que P' soit trivial, et si de plus G est simple sur S, on peut supposer S' étalé sur S. Par suite, si de plus le corps résiduel de A est algébriquement clos ("cas géométrique"), P est fidèlement plat sur A si et seulement si il est trivial. Donc, si S est un pré-schéma algébrique sur un corps algébriquement clos, et G simple de type fini sur S, on voit que la condition de fidèle platitude sur S équivaut à la condition de trivialité analytique (SLF) de SERRE ([6] p. 1-12).

On peut introduire d'autres types plus forts de conditions sur P, ayant la nature d'une "trivialité locale". Nous dirons en particulier, que P est isotrivial (resp. strictement isotrivial) si pour tout $s \in S$, il existe un voisinage ouvert U de s, et un morphisme fini et fidèlement plat (resp. un revêtement étale surjectif) $U' \longrightarrow U$ tel que $P' = P \times_S U'$ soit trivial. (Nous nous écartons de la terminologie de SERRE [1], qui appelle localement isotrivial ce que nous appelons strictement isotrivial). La stricte isotrivialité est surtout utile si G est simple sur S, mais est une notion inadéquate par contre dans les autres cas.

Si G est affine sur S, tout fibré principal homogène P sous G est affine d'après le paragraphe 2, d'où la possibilité, grâce au théorème 2, de "descendre" de tels fibrés par des morphismes fidèlement plats et quasi-compacts. Prenons, en particulier, $G = Gl(n)_S$, défini par la condition que le foncteur de S-pré-schémas $S' \longrightarrow Hom_S(S', G)$ (à valeurs dans la catégorie des groupes) s'identifie au foncteur $Gl(n)(S') = Gl(n, H^0(S', \underline{O}_{S'}))$ du A, paragraphe 4, (e). Utilisant le fait (i) que tout fibré principal homogène sous G (resp. tout faisceau localement libre de rang n sur S) devient isomorphe à l'objet "trivial" G (resp. $\underline{O}_S^n$) par une extension fidèlement plate et quasi-compacte convenable de S, (ii) que l'on peut descendre les objets du type envisagé (fibrés principaux homogènes sous G, resp. faisceaux localement libres de rang n) par de tels morphismes, et enfin (iii) que le groupe des automorphismes du fibré trivial sur un S'/S est fonctoriellement isomorphe au groupe des automorphismes du faisceau localement libre de rang n trivial sur S', on conclut "formellement" qu'il "revient au même" de se donner sur S (ou sur un S'/S) un fibré principal homogène de groupe G, ou de s'y donner un faisceau localement libre de rang n. (De façon plus précise, on a une <u>équivalence de catégories fibrées</u>). On en conclut en particulier :

PROPOSITION 6.1. - <u>Tout fibré principal homogène de groupe</u> $Gl(n)_S$ <u>est localement trivial.</u>

Par des arguments connus, on en conclut le même résultat pour des groupes structuraux tels que $Sl(n)_S$, $Sp(n)_S$ et des produits de tels groupes. On en conclut aussi que, si F est un sous-groupe fermé de $G = Gl(n)_S$, plat sur S, tel que le quotient G/F existe, et que G soit un fibré principal homogène isotrivial (resp. strictement isotrivial) sur G/F, de groupe $F \times_S (G/F)$, alors <u>tout</u> fibré principal homogène de groupe F est isotrivial (resp. strictement isotrivial). Cela s'applique à tous les "groupes linéaires" sur S qui ont été utilisés jusqu'à présent, et en particulier, au cas où $G = S \times_k \Gamma$, S étant un pré-schéma sur le corps k, et Γ un groupe linéaire au sens classique, et en particulier simple, sur k. Cela résout donc, pour de tels groupes, une question de SERRE (loc. cit.).

Signalons aussi que, pour la plupart des groupes (linéaires ou non) simples sur S connus, et en tout cas ceux de la forme $S \times_k \Gamma$ comme ci-dessus, on peut montrer que tout fibré principal homogène isotrivial est strictement isotrivial, ce qui résoud en particulier, une autre question de SERRE (loc. cit. 1-14), compte tenu qu'un fibré principal homogène obtenu par une descente à la CARTIER (cf. paragraphe 3, exemple 2) est manifestement isotrivial.

REMARQUE. - Une des difficultés essentielles dans ces questions (mise à part la question de l'existence des schémas quotients G/F) est le manque de critères d'effectivité pour une donnée de descente par un morphisme fidèlement plat <u>non fini.</u>

BIBLIOGRAPHIE.

[1] DIEUDONNÉ (J.) et GROTHENDIECK (Alexander). - Eléments de géométrie algébrique, à paraître dans les Publications mathématiques de l'Institut des Hautes Etudes Scientifiques.

[2] GRAUERT (H.) und REMMERT (R.). - Komplexe Räume, Math. Annalen, t. 136, 1958, p. 245-318.

[3] GROTHENDIECK (Alexander). - Géométrie formelle et géométrie algébrique. Séminaire Bourbaki, t. 11, 1958/59, n° 182.

[4] MURRE (J. P.). - On a connectedness theorem for a birational transformation at a simple point, Amer. J. Math., t. 80, 1958, p. 3-15.

[5] SERRE (Jean-Pierre). - Géométrie algébrique et géométrie analytique, Ann. Inst. Fourier Grenoble, t. 6, 1955-56, p. 1-42.

[6] SERRE (Jean-Pierre). - Espaces fibrés algébriques, Séminaire Chevalley, t. 2, 1958 : Anneaux de Chow et applications, n° 1.

Séminaire BOURBAKI
12e année, 1959/60, n° 195

Février 1960

TECHNIQUE DE DESCENTE ET THÉORÈMES D'EXISTENCE EN GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

II. LE THÉORÈME D'EXISTENCE EN THÉORIE FORMELLE DES MODULES

par Alexander GROTHENDIECK

A. Foncteurs représentables et pro-représentables.

1. Foncteurs représentables.

Soit $\underset{\sim}{C}$ une catégorie. Pour tout $X \in \underset{\sim}{C}$, soit h_X le foncteur contravariant de $\underset{\sim}{C}$ dans la catégorie (Ens) des ensembles,

$$h_X : \underset{\sim}{C} \longrightarrow (\mathrm{Ens})$$

défini par la formule

$$h_X(Y) = \mathrm{Hom}(Y , X) \quad .$$

Si on a un morphisme $X \longrightarrow X'$ dans $\underset{\sim}{C}$, on en déduit de façon évidente un homomorphisme $h_X \longrightarrow h_{X'}$ de foncteurs : h_X est un foncteur covariant en X, i. e. on a défini un foncteur covariant canonique

$$h : \underset{\sim}{C} \longrightarrow \mathrm{Hom}(\underset{\sim}{C}^{0} , (\mathrm{Ens}))$$

de $\underset{\sim}{C}$ dans la catégorie des foncteurs covariants de la duale $\underset{\sim}{C}^{0}$ de $\underset{\sim}{C}$ dans la catégorie des ensembles. Rappelons alors :

PROPOSITION 1, 1. - Ce foncteur h est pleinement fidèle, en d'autres termes, pour tout couple X, X' d'objets de $\underset{\sim}{C}$, l'application naturelle

$$\mathrm{Hom}(X , X') \longrightarrow \mathrm{Hom}(h_X , h_{X'})$$

est bijective.

En particulier, si un foncteur $F \in \mathrm{Hom}(\underset{\sim}{C}^{0} , (\mathrm{Ens}))$ est isomorphe à un foncteur de la forme h_X, X est déterminé à un isomorphisme unique près. On dit alors que le foncteur F est représentable. La proposition précédente signifie alors que le foncteur canonique h définit une équivalence de la catégorie $\underset{\sim}{C}$ avec la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Hom}(\underset{\sim}{C}^{0} , (\mathrm{Ens}))$ formée par les foncteurs représentables. Ce fait est à la base de la notion de "solution d'un Problème Universel", un tel problème consistant toujours à examiner si un foncteur donné (contravariant comme ici, ou covariant dans le cas dual) de $\underset{\sim}{C}$ dans (Ens) est représentable.

Notons de plus, que, par définition même de la notion de produit dans une catégorie [1], le foncteur $h : X \rightsquigarrow h_X$ **commute aux produits chaque fois** qu'ils existent (et plus généralement aux limites projectives finies ou infinies, en particulier aux produits fibrés, à la formation de "noyaux" [2] etc., chaque fois qu'ils existent) : on a un isomorphisme de foncteurs

$$h_{X \times X'} \xrightarrow{\sim} h_X \times h_{X'}$$

chaque fois que $X \times X'$ existe, i. e. on a des bijections fonctorielles en Y

$$h_{X \times X'}(Y) \xrightarrow{\sim} h_X(Y) \times h_{X'}(Y) \quad .$$

En particulier, la donnée d'un morphisme

$$X \times X' \longrightarrow X''$$

dans $\underset{\sim}{C}$ (i. e. d'une "loi de composition" dans $\underset{\sim}{C}$ entre X , X' , X'') est équivalente à la donnée d'un morphisme $h_{X \times X'} = h_X \times h_{X'} \longrightarrow h_{X''}$, i. e. à la donnée pour tout $Y \in \underset{\sim}{C}$ d'une loi de composition d'ensembles

$$h_X(Y) \times h_{X'}(Y) \longrightarrow h_{X''}(Y)$$

de telle façon que, pour tout morphisme $Y \longrightarrow Y'$ dans $\underset{\sim}{C}$, le système des applications ensemblistes

$$h_{X^{(i)}}(Y) \longrightarrow h_{X^{(i)}}(Y') \quad (\text{pour } i = 0 , 1 , 2)$$

soit un morphisme pour les deux lois de composition, relatives à Y et Y' . On voit de cette façon que la notion de structure de "$\underset{\sim}{C}$-groupe" , "$\underset{\sim}{C}$-anneau", etc. sur un objet X de $\underset{\sim}{C}$ s'exprime de la façon la plus commode (en théorie comme en pratique) en disant que pour tout $Y \in \underset{\sim}{C}$, on a une loi de groupes (resp. anneau, etc.) au sens usuel sur l'ensemble $h_X(Y)$; les applications $h_X(Y) \longrightarrow h_X(Y')$ correspondant à des morphismes $Y \longrightarrow Y'$ devant être des homomorphismes de groupes (resp. anneaux, etc.). C'est la façon la plus intuitive et la plus commode par exemple, pour définir les divers groupes classiques G_a , G_m , $G\ell(n)$, etc. sur un pré-schéma S de base quelconque et pour écrire les relations classiques entre ces groupes, pour mettre sur le schéma affine $V(\underset{\sim}{F})$ au-dessus de S , défini par un faisceau quasi-cohérent $\underset{\sim}{F}$, une structure de "fibré vectoriel", pour définir et étudier les diverses variétés de drapeaux (grassmaniennes, fibrés projectifs) associés, etc. ; <u>le voga général étant d'identifier purement et simplement, à l'aide du foncteur canonique</u> h , <u>les objets de</u> $\underset{\sim}{C}$ <u>à des foncteurs contravariants particuliers, les foncteurs représentables,</u>

de $\underset{\sim}{C}$ dans la catégorie des ensembles.

Le procédé habituel de renversement de flèches, qui s'impose par exemple, dans le cas des schémas affines pour passer du langage géométrique au langage de l'algèbre commutative, conduit à dualiser les considérations précédentes et en particulier, à introduire aussi les foncteurs covariants $\underset{\sim}{C} \longrightarrow (\mathrm{Ens})$ représentables, i. e. de la forme $Y \rightsquigarrow \mathrm{Hom}(X\ , Y) = h'_X(Y)$.

2. Foncteurs proreprésentables, pro-objets.

Soit $\underset{\sim}{X} = (X_i)_{i\in I}$ un système projectif d'objets de $\underset{\sim}{C}$; il lui correspond un foncteur covariant

$$h'_{\underset{\sim}{X}} = \varinjlim_i h'_{X_i}$$

de façon plus explicite

$$h'_{\underset{\sim}{X}}(Y) = \varinjlim_i h'_{X_i}(Y) = \varinjlim_i \mathrm{Hom}(X_i\ , Y)$$

de $\underset{\sim}{C}$ dans (Ens) . Un foncteur de $\underset{\sim}{C}$ dans (Ens) qui est isomorphe à un foncteur de ce type avec I filtrant, est dit pro-représentable. D'après le numéro précédent, ce sont exactement les foncteurs isomorphes à des limites inductives filtrantes de foncteurs représentables. Soit $\underset{\sim}{X}' = (X'_j)_{j\in J}$ un deuxième système projectif filtrant dans $\underset{\sim}{C}$ (construit sur un deuximèe ensemble d'indices préordonné filtrant J), on vérifie aisément qu'on a une bijection canonique (généralisant la proposition 1, 1)

$$\mathrm{Hom}(h_{\underset{\sim}{X}'}\ , h_{\underset{\sim}{X}}) = \varprojlim_j \varinjlim_i \mathrm{Hom}(X_i\ , X'_j) \quad .$$

Cela amène à introduire la catégorie $\mathrm{Pro}(\underset{\sim}{C})$ des pro-objets de $\underset{\sim}{C}$; ses objets sont les systèmes projectifs d'objets de $\underset{\sim}{C}$ (sur des ensembles d'indices préordonnés filtrants variables), et si $\underset{\sim}{X} = (X_i)_{i\in I}$ et $\underset{\sim}{X}' = (X'_j)_{j\in J}$ sont deux tels objets, on pose

$$\mathrm{Pro}\ \mathrm{Hom}(\underset{\sim}{X}\ , \underset{\sim}{X}') = \varprojlim_j \varinjlim_i \mathrm{Hom}(X_i\ , X'_j)$$

la composition des pro-homomorphismes étant évidente. Par construction même, $\underset{\sim}{X} \rightsquigarrow h'_{\underset{\sim}{X}}$ peut être considéré comme un foncteur contravariant en $\underset{\sim}{X}$, établissant une équivalence de la catégorie duale de la catégorie $\mathrm{Pro}(C)$ des pro-objets de $\underset{\sim}{C}$, avec la catégorie des foncteurs covariants pro-représentables de $\underset{\sim}{C}$ dans (Ens) . Bien entendu, un objet X de $\underset{\sim}{C}$ définit canoniquement un pro-objet, dénoté encore par X , de sorte que $\underset{\sim}{C}$ <u>est équivalente à une sous-catégorie pleine de</u> $\mathrm{Pro}(\underset{\sim}{C})$. Si alors $\underset{\sim}{X} = (X_i)_{i\in I}$ est un pro-objet quelconque de $\underset{\sim}{C}$, alors on aura (avec l'identification précédente)

$$\underset{\sim}{X} = \varprojlim_i X_i$$

la limite projective étant <u>prise dans</u> $\mathrm{Pro}(\underset{\sim}{C})$ (puisque $h_{\underset{\sim}{X}} = \varinjlim_i h_{X_i}$).

On fera attention que, lors même que la limite projective des X_i <u>existe dans</u> $\underset{\sim}{C}$, elle sera généralement non isomorphe à la limite projective $\underset{\sim}{X}$ dans $\mathrm{Pro}(\underset{\sim}{C})$, comme il est déjà évident dans le cas où $\underset{\sim}{C}$ est la catégorie des ensembles. On notera que par définition même, $\varprojlim_{\underset{\sim}{C}} X_i = L$ est défini par la condition que le foncteur en $Y \in \underset{\sim}{C}$

$$\varprojlim_i \mathrm{Hom}_{\underset{\sim}{C}}(Y , X_i) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Pro}(\underset{\sim}{C})}(Y , \underset{\sim}{X})$$

et à valeurs dans (Ens) soit représentable à l'aide de $\underset{\sim}{L}$, i. e. soit isomorphe à $\mathrm{Hom}_{\underset{\sim}{C}}(Y , \underset{\sim}{L})$; par suite, $\lim_{\underset{\sim}{C}} X_i$ <u>est défini déjà en termes du</u> pro-objet $\underset{\sim}{X}$, et de façon précise dépend fonctoriellement du pro-objet $\underset{\sim}{X}$ chaque fois qu'elle est définie ; il n'y a donc pas d'inconvénient à la dénoter par $\varprojlim_{\underset{\sim}{C}}(\underset{\sim}{X})$. Si les limites projectives dans $\underset{\sim}{C}$ existent toujours, $\varprojlim_{\underset{\sim}{C}}(\underset{\sim}{X})$ est un foncteur de $\mathrm{Pro}(\underset{\sim}{C})$ dans $\underset{\sim}{C}$, et il y a un homomorphisme canonique de foncteurs $\lim_{\underset{\sim}{C}}(\underset{\sim}{X}) \longrightarrow \underset{\sim}{X}$. Comme tout foncteur, covariant pour fixer les idées

$$F : \underset{\sim}{C} \longrightarrow \underset{\sim}{C}'$$

se prolonge de façon évidente en un foncteur

$$\mathrm{Pro}(F) : \mathrm{Pro}(\underset{\sim}{C}) \longrightarrow \mathrm{Pro}(\underset{\sim}{C}')$$

il s'ensuit que, si dans $\underset{\sim}{C}'$ les limites projectives existent toujours, F définit aussi canoniquement un foncteur composé $\varprojlim_{\underset{\sim}{C}'} \circ \mathrm{Pro}(F)$:

$$\overline{F} : \mathrm{Pro}(\underset{\sim}{C}) \longrightarrow \underset{\sim}{C}'$$

transformant $\underset{\sim}{X} = (X_i)_{i\in I}$ en $\varprojlim_{\underset{\sim}{C}'} F(X_i)$.

Un pro-objet $\underset{\sim}{X}$ est dit <u>pro-objet strict</u> s'il est isomorphe à un pro-objet $(X_i)_{i\in I}$, ou les morphismes de transition $X_i \longrightarrow X_j$ sont des <u>épimorphismes</u> ; un foncteur défini par un tel objet est dit <u>strictement pro-représentable</u>. On peut alors exiger de plus que I soit <u>ordonné</u> filtrant, et que tout épimorphisme

$X_i \to X'$ soit équivalent à un épimorphisme $X_i \to X_j$ pour $j \in I$ convenable (déterminé de façon unique par cette condition). Sous ces conditions, le système projectif $(X_i)_{i \in I}$ est déterminé à un <u>isomorphisme unique près</u> (au sens usuel d'isomorphismes de systèmes projectifs). Il en résulte que <u>dans</u> $\operatorname{Pro}(\underset{\sim}{C})$ <u>la limite projective d'un système projectif de pro-objets stricts</u> $\underset{\sim}{X}^{(\alpha)}$ <u>existe toujours</u> et qu'avec les notations ci-dessus pour F , $\bar{F}$ on aura

$$\bar{F}(\varprojlim_{\alpha} \underset{\sim}{X}^{(\alpha)}) = \varprojlim_{\alpha}{}_{\underset{\sim}{C}'} F(X^{(\alpha)})$$

En particulier, si tout pro-objet de $\underset{\sim}{C}$ est strict, (cf. le numéro suivant), le foncteur prolongé $\bar{F}$ commute aux limites projectives.

3. <u>Caractérisation des foncteurs pro-représentables.</u>

Soient $\underset{\sim}{C}$, $\underset{\sim}{C}'$ deux catégories où les limites projectives finies (i. e. relatives à des ensembles préordonnés finis, non nécessairement filtrants) existent, ou ce qui revient au même, où les produits finis et les produits fibrés finis existent (ce qui implique en particulier, l'existence d'un "objet unité à droite" e , tel que $\operatorname{Hom}(X , e)$ soit réduit à un élément pour tout X). Soit F un foncteur covariant de $\underset{\sim}{C}$ dans $\underset{\sim}{C}'$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

i. F permute aux limites projectives finies ;

ii. F permute aux produits finis et aux produits fibrés finis ;

iii. F permute aux produits finis, et pour tout diagramme exact

$$X' \longrightarrow X' \rightrightarrows X''$$

dans $\underset{\sim}{C}$ ([3], A, définition 2, 1) le diagramme transformé par F

$$F(X) \longrightarrow F(X') \rightrightarrows F(X'')$$

est exact.

On dit alors que F est <u>exact à gauche</u>.

Par la suite, on suppose que dans $\underset{\sim}{C}$, les limites projectives finies existent. Il est alors immédiat sur les définitions qu'un foncteur représentable est exact à gauche, et par passage à la limite qu'<u>un foncteur pro-représentable est exact à gauche</u>.

Pour obtenir une réciproque, soit

$$F : \underset{\sim}{C} \longrightarrow (\mathrm{Ens})$$

un foncteur covariant, soient $X \in C$ et $\xi \in F(X)$. On dit que ξ (ou le couple

$(X, \xi))$ est <u>minimal</u> si pour tout $X' \in \underset{\sim}{C}$ et $\xi' \in F(X')$, et tout monomorphisme strict ([3], A, 2) $u : X' \longrightarrow X$ tel que $\xi = F(u)(\xi')$, u est un isomorphisme. On dit d'autre part, qu'un couple (X, ξ) <u>domine</u> (X'', ξ'') $(\xi \in F(X)$, $\xi'' \in F(X''))$ s'il existe un morphisme $v : X \longrightarrow X''$ tel que $\xi'' = F(v)(\xi)$; <u>si ξ est minimal et si F est exact à gauche, ce morphisme v est alors unique</u> ; <u>si ξ'' est minimal, v est surjectif</u>. On en déduit facilement la proposition suivante :

PROPOSITION 3, 1. - Pour que F soit strictement pro-représentable, il faut et il suffit qu'il satisfasse aux deux conditions :

i. F est exact à gauche ;

ii. Tout couple (X, ξ), avec $\xi \in F(X)$, est dominé par un couple <u>minimal</u>.

Cette dernière condition est vide si tout objet de $\underset{\sim}{C}$ est artinien, (en prenant un sous-objet X' de X minimal parmi ceux pour lesquels il existe $\xi' \in F(X')$ tel que ξ soit l'image de ξ'). D'où :

COROLLAIRE. - Soit $\underset{\sim}{C}$ une catégorie dont les objets sont artiniens et où les limites projectives finies existent. Alors les foncteurs pro-représentables de $\underset{\sim}{C}$ dans (Ens) sont exactement les foncteurs exacts à gauche, et ils sont même strictement pro-représentables.

Ce dernier fait signifie aussi que <u>tout pro-objet de $\underset{\sim}{C}$ est strict</u>.

4. <u>Exemple : groupes du type galoisien, groupes pro-algébriques</u>.

Si $\underset{\sim}{C}$ est la catégorie des groupes finis ordinaires, $\mathrm{Pro}(\underset{\sim}{C})$ est équivalente à la catégorie des groupes topologiques compacts totalement discontinus. Ce sont des groupes de ce type et leurs généralisations, obtenues en remplaçant les groupes finis ordinaires par des schémas en groupes finis au-dessus d'un pré-schéma de base donné (par exemple, les groupes algébriques finis sur un corps k), qui tiendront lieu de groupes fondamentaux, d'homotopie, d'homologie absolus et relatifs pour les pré-schémas. Dans tous ces exemples, le corollaire à la proposition 3, 1 s'applique, et c'est bien par le foncteur associé que le π_1 doit se définir [2]. Il en est de même en partant de la catégorie des groupes algébriques ou quasi-algébriques sur un corps (ou plus généralement sur un pré-schéma noethérien) : on trouve les "<u>groupes pro-algébriques</u>" de SERRE [4].

5. <u>Exemple : "variétés formelles"</u>.

Soient Λ un anneau noethérien, $\underset{\sim}{C}$ la catégorie des Λ-algèbres A qui sont des modules de type fini artiniens sur Λ (ou plus brièvement, des Λ-algèbres artiniennes). On est sous les conditions du corollaire à la proposition 3, 1. La catégorie $\mathrm{Pro}(\underset{\sim}{C})$ est ici équivalente à la catégorie des algèbres topologiques O sur Λ isomorphes à des limites projectives topologiques

$$O = \varprojlim O_i$$

d'algèbres $O_i \in \underset{\sim}{C}$, i. e. dont la topologie est linéaire, séparée et complète, et telle que pour tout idéal ouvert J_i de O, O/J_i soit une algèbre artinienne sur Λ. Le foncteur $\underset{\sim}{C} \longrightarrow (\mathrm{Ens})$ associé à une telle algèbre n'est autre que

$$\begin{aligned} F(A) = h'_O(A) &= \text{ensemble des homomorphismes continus de } \Lambda\text{-algèbres} \\ &\qquad \text{topologiques } O \longrightarrow A \\ &= \varinjlim_i \mathrm{Hom}_{\Lambda\text{-algèbres}}(O_i , A) \end{aligned}$$

On notera d'ailleurs que la catégorie $\underset{\sim}{C}$ est essentiellement le produit des catégories analogues, correspondant aux anneaux locaux complétés des $\Lambda_{\mathfrak{m}}$ pour les idéaux maximaux $\mathfrak{m}$ de Λ ; on peut donc si on le désire se limiter au cas où Λ est un tel anneau local complet. En tous cas, O se décompose canoniquement en le produit topologique de composants locaux, correspondants aux "points" du schéma formel [2] défini par O. Un tel point est défini par un objet ξ d'un $F(K)$, où $K \in \underset{\sim}{C}$ est un corps (par exemple, le corps résiduel du composant local envisagé), deux couples (ξ , K) et (ξ' , K') définissant le même point si et seulement si ils sont dominés par un même (ξ'' , K''), ou encore s'ils dominent un même (ξ''' , K'''). (Si les $\Lambda/\mathfrak{m}$ sont algébriquement clos, il suffit de prendre l'ensemble somme des $F(\Lambda/\mathfrak{m})$).

Il importe de donner des conditions pour que le composant local O_ξ de O correspondant à un $\xi \in F(K)$ soit un anneau noethérien. Lorsque Λ^ξ est un anneau local complet (noethérien, on le rappelle), il revient au même de dire que O_ξ est isomorphe à un anneau quotient d'un anneau de séries formelles $\Lambda^\xi[[t_1 , \ldots , t_n]]$ sur Λ. Pour donner un tel critère, introduisons (pour tout anneau A) la A-algèbre I_A des "nombres duaux" de A par

$$I_A = A[t]/t^2 A[t] \quad .$$

Soit $\varepsilon : I_A \longrightarrow A$ l'homomorphisme d'augmentation, il définit (si $A \in \underset{\sim}{C}$) une application

$$F(\varepsilon) : F(I_A) \rightarrow F(A)$$

et utilisant le fait que F est exact à gauche, on définit de façon intrinsèque une structure de A-module dans la partie

$$F(I_A , \xi) = F(\varepsilon)^{-1}(\xi)$$

de $F(I_A)$ formée des $\xi' \in F(I_A)$ qui "se réduisent suivant ξ" ; utilisant la forme explicite de F en termes de O , on trouve que ce K-module s'identifie à $\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathfrak{m}_\xi/\mathfrak{m}_\xi^2 , A)$, où $\mathfrak{m}_\xi$ est le noyau de l'homomorphisme $\xi : O \to A$, i. e. si A est un corps, l'idéal maximal du composant local O_ξ de O . On en déduit aussitôt la proposition suivante :

PROPOSITION 5, 1. - Soit $\xi \in F(K)$, où $K \in \underset{\sim}{C}$ est un corps. Pour que le composant local O_ξ correspondant de O soit un anneau <u>noethérien</u>, il faut et il suffit que l'ensemble $F(I_K , \xi)$ des éléments de $F(I_K)$ se réduisant suivant ξ soit un espace vectoriel de <u>dimension finie</u> sur K . Sous ces conditions, on a un isomorphisme canonique

$$F(I_K , \xi) = \mathrm{Hom}(\mathfrak{m}_\xi/\mathfrak{m}_\xi^2 + \mathfrak{n}_\xi \underset{\sim}{O}_\xi) , K)$$

(où $\mathfrak{n}_\xi$ est l'idéal maximal de Λ noyau de l'homomorphisme $\Lambda \to K$) , en particulier, la dimension du K-espace vectoriel $F(I_K , \xi)$ est égale à la dimension de l'espace vectoriel $\mathfrak{m}_\xi/\mathfrak{m}_\xi^2$ sur le corps $O_\xi/\mathfrak{m}_\xi = K(\xi)$.

Supposons que O_ξ soit noethérien, et supposons pour simplifier l'écriture que Λ soit local complet, et $O = O_\xi$. On dit que O <u>est simple sur</u> Λ si O est une algèbre finie et étale sur l'algèbre complétée du localisé de $\Lambda[t_1 , \dots , t_n]$ en un idéal maximal de cet anneau, induisant l'idéal maximal de Λ ; lorsque l'extension résiduelle de O sur Λ est triviale, (par exemple, le corps résiduel de Λ est algébriquement clos), cela équivaut à dire que O lui-même est isomorphe à une telle algèbre de séries formelles. Enfin, si on ne suppose plus nécessairement O noethérien, on dira encore que O <u>est simple sur</u> Λ si O est isomorphe à une limite projective topologique de Λ-algèbres quotients qui sont noethériennes et Λ-simples au sens précédent. On généralise aussitôt au cas où Λ , O ne sont plus supposés locaux. Ceci dit, on a la proposition suivante :

PROPOSITION 5, 2. - Pour que O soit simple sur Λ , il faut et il suffit que le foncteur F associé transforme épimorphismes en épimorphismes.

Cela signifie donc que pour tout homomorphisme <u>surjectif</u> $A \to A'$ dans $\underset{\sim}{C}$, $F(A) \to F(A')$ est <u>surjectif</u>. Bien entendu, il suffit de vérifier cette condition quand A est <u>local</u>, et (en procédant de proche en proche) quand l'idéal de A noyau de $A \to A'$ est annulé par l'idéal maximal de A . Cela ramène , en pratique, à vérifier qu'une certaine obstruction, liée à des invariants <u>infinitésimaux</u>

de la situation donnant naissance au foncteur F, est nulle, problème qui est de nature cohomologique.

Pour finir, disons quelques mots, dans le contexte précédent, des anneaux de définition. Soit toujours F un foncteur de $\underset{\sim}{C}$ dans (Ens), pro-représentable à l'aide d'une Λ-algèbre topologique O. Alors pour tout $A \in \underset{\sim}{C}$ et tout $\xi \in F(A)$, il existe un plus petit sous-anneau A' de A tel que ξ soit image d'un élément ξ' de $F(A')$ (lequel est alors uniquement déterminé) : en effet, il suffit d'interpréter ξ au moyen d'un homomorphisme de O dans A, et de prendre pour A' l'image de O par ce dernier. On dit alors que A' est l'anneau de définition de l'objet $\xi \in F(A)$. Si $u : A \longrightarrow B$ est un homomorphisme d'algèbres et si $\eta = F(u)(\xi)$, alors l'anneau de définition de η est l'image par u de l'anneau de définition de ξ. Lorsqu'on part d'un foncteur F de $\underset{\sim}{C}$ dans (Ens), l'existence des anneaux de définition et les propriétés qu'on vient d'en donner sont à peu de choses près équivalentes au fait que F soit pro-représentable ; c'est dire qu'elles sont le plus souvent loin d'être triviales.

B. Les deux théorèmes d'existence.

Gardons les notations de A, paragraphe 5, et partons d'un foncteur covariant

$$F : \underset{\sim}{C} \longrightarrow (\mathrm{Ens})$$

on cherche des critères maniables pour que F soit pro-représentable, i. e. exprimable à l'aide d'une Λ-algèbre O comme plus haut. En vertu du corollaire de A, proposition 3, 1., il faut et il suffit pour cela que F soit exact à gauche. Dans l'état actuel de la technique de descente, (cf. questions posées dans [3], p. 9) ce critère n'est pas directement vérifiable sous cette forme dans les cas les plus importants, et on a besoin de critères en apparence moins exigeants.

THÉORÈME 1. - Pour que le foncteur F soit pro-représentable, il faut et il suffit qu'il satisfasse les deux conditions suivantes :

i. F permute aux produits finis ;

ii. Pour toute algèbre $A \in \underset{\sim}{C}$ et tout homomorphisme $A \longrightarrow A'$ dans $\underset{\sim}{C}$ tel que le diagramme

$$A \longrightarrow A' \rightrightarrows A' \otimes_A A'$$

soit exact ([3] A, définition 1, 2.), le diagramme transformé

$$F(A) \longrightarrow F(A') \rightrightarrows F(A' \otimes_A A')$$

est exact.

De plus, il suffit de vérifier (ii) quand A est local et quand de plus, on est dans l'un des deux cas suivants :

a. A' est un module libre sur A ;

b. Le module quotient A'/A est un A-module de longueur 1 .

La démonstration de ce théorème est assez délicate et ne peut être esquissée ici. Bornons-nous à signaler qu'elle repose essentiellement sur une étude des relations d'équivalence (au sens des catégories) dans le spectre d'une algèbre artinienne, (étude qui pose encore plusieurs problèmes, dont la solution semble indispensable pour le développement ultérieur de la théorie).

Dans les applications, la vérification de la condition (i) est toujours triviale. Celle de (ii) se décompose en deux : le cas ou A' est un A-module libre relève de la technique de descente par morphismes plats ([3], théorèmes 1, 2 et 3) et n'offre pas de difficulté. Pour traiter le cas (b), on utilisera le résultat suivant :

THÉORÈME 2. - Soient A un anneau local artinien d'idéal maximal $\mathfrak{m}$, A' une A-algèbre contenant A telle que $\mathfrak{m}A' \subset A$ et que $A \to A' \rightrightarrows A' \otimes_A A'$ soit exact (ce qui est le cas en particulier si A'/A est un A-module de longueur 1). Soit $\mathcal{F}$ la categorie fibrée ([3] A, définition 1, 1) des faisceaux quasi-cohérents et plats sur des pré-schémas variables. Alors le morphisme $\mathrm{Spec}(A') \to \mathrm{Spec}(A)$ est un morphisme de $\mathcal{F}$-descente strict ([3] A, définition 1, 7).

En d'autres termes, la donnée d'un A-module plat M est complètement équivalente à la donnée d'un A'-module plat M' , muni d'un $A' \otimes_A A'$-isomorphisme de $M' \otimes_A A'$ sur $A' \otimes_A M'$ satisfaisant la condition de transitivité habituelle pour une donnée de descente (loco citato).

Le théorème 2 se démontre en prouvant d'abord que

$$H^i(A'/A\ ,\ G_a) = 0 \qquad \text{pour} \quad i \geqslant 1$$

([3] A, 4. e.), l'hypothèse $\mathfrak{m}A' \subset A$ permettant de se ramener aisément au cas où A est un corps k (savoir $A/\mathfrak{m}$). On applique alors les équivalences signalées dans [3], page 16,

C. Applications à quelques cas particuliers.

1. Remarques générales sur les foncteurs représentés par des pré-schémas.

Soit S un pré-schéma localement noethérien. Un pré-schéma X sur S est dit localement de type fini sur S si pour tout $x \in X$, se projetant en $y \in Y$, il existe un voisinage affine de y d'anneau A ; et un voisinage affine de x au-dessus de ce dernier, d'anneau B, tels que B soit une A-algèbre de type fini. On trouve de nombreux exemples importants de pré-schémas localement de type fini sur S, qui ne sont pas de type fini sur S, comme solutions de problèmes universels classiques ; ainsi il importe de pouvoir considérer le schéma de Picard d'une courbe comme réunion d'une infinité de composantes connexes, (qu'il faut se garder de confondre avec la composante connexe de l'élément neutre, i. e. la "variété de Picard"). Il est alors parfois commode de se placer dans la catégorie $\underset{\sim}{C}$ des pré-schémas localement de type fini sur S, pour y examiner la question de la représentabilité d'un foncteur contravariant F. Le but principal de ces exposés est de développer une technique générale permettant de reconnaître si un tel foncteur F est représentable, et d'étudier les propriétés du S-pré-schéma X correspondant à l'aide de celles de F. Signalons en passant que dans cette étude, on trouve des exemples non pathologiques de pré-schémas sur S non séparés sur S, notamment comme "pré-schémas de Picard" d'excellents S-schémas ; il faut donc se garder de bannir de la géométrie algébrique les pré-schémas qui ne sont pas des schémas

Soit X un pré-schéma localement de type fini sur S, et soit F :

$$F(Y) = \mathrm{Hom}_S(Y , X)$$

le foncteur contravariant associé. On peut considérer la restriction F_o de F à la sous-catégorie $\underset{\sim}{C}_o$ de $\underset{\sim}{C}$ formée des pré-schémas Y sur S qui sont artiniens et finis sur S : lorsque $S = \mathrm{Spec}(\Lambda)$, $\underset{\sim}{C}_o$ est donc la catégorie duale de la catégorie des Λ-algèbres artiniennes considérée dans B. Si $Y = \mathrm{Spec}(A)$, où A est un anneau local artinien, Y est réduit à un seul point y placé au-dessus d'un point fermé s de S, et un S-homomorphisme de Y dans (i. e. un élément de $F(Y)$ est défini par la donnée d'un point $x \in X$ au-dessus de s, et d'un $\underset{\sim}{O}_s$-homomorphisme de $\underset{\sim}{O}_x$ dans A. S'il existe un tel homomorphisme, alors x est nécessairement un point fermé de X (son corps résiduel étant algébrique sur celui de s). Cela montre donc que la restriction F_o de F aux "Λ-algèbres artiniennes" est pro-représentable, et est représentée par la Λ-algèbre topologique dont les composants locaux sont les complétés $\hat{\underset{\sim}{O}}_x$ des anneaux locaux de X aux points x de X qui sont fermés et se trouvent au-dessus de points fermés de Y. Cela montre que la seule connaissance de F_o donne des renseignements précis sur la structure de X (savoir la structure des complétés de ses anneaux locaux aux points indiqués). On notera que même dans le cas où S

est le spectre d'un corps algébriquement clos, ce n'est que grâce à la considération systématique de "variétés" Y telles que $\underset{\sim}{O}_Y$ peut admettre des éléments nilpotents, en particulier en travaillant avec les spectres d'anneaux artiniens locaux, qu'on peut arriver à la "bonne formulation" des problèmes universels classiques, et à en saisir l'aspect "infinitésimal".

Quand on part d'un foncteur F donné à l'avance, dont on veut décider s'il est représentable, l'étude du foncteur F_o (à l'aide des théorèmes 1 et 2) donnera des indications quasi-complètes ; soit, comme il arrive fréquemment (en testant simplement, par exemple, la nature des ensembles $F(I_K , \xi)$ et leur comportement fonctoriel, cf. A) qu'on constate que F_o déjà n'est pas pro-représentable (ce qui explique l'échec des tentatives faites jusqu'à présent pour définir de façon plus ou moins naturelle des variétés de modules pour la classification des fibrés vectoriels de rang >1) ; soit qu'on arrive à vérifier que F_o est bien représentable, mais que les espaces vectoriels $F(I_K , \xi)$ ne sont pas de dimension finie, auquel cas il faut se contenter de la solution "formelle" ; soit enfin que F_o est bien représentable par un produit d'anneaux locaux complets noethériens, ce qui donne de très fortes présomptions pour que F soit lui-même représentable et, joint à des propriétés analogues mais de nature plus globale que nous pensons développer par la suite, suffira sans doute à entraîner qu'il en est effectivement ainsi. Enfin, on rencontre des problèmes géométriques intéressants (voir paragraphes 4 et 5 ci-dessous) où on ne dispose que du foncteur F_o (ne provenant d'aucun foncteur "global" F), et où on s'estimera heureux quand on aura pu lui associer un "schéma formel de modules".

Pour terminer ces généralités, indiquons comment la théorie des schémas explique des anomalies apparentes, telles la surface de Igusa V dont la "variété de Picard" P est réduite à un point, et pour laquelle pourtant on a $H^1(V , \underset{\sim}{O}_V) \neq 0$; dans ce cas, P est un groupe "purement infinitésimal" non réduit au groupe unité, i. e. défini par une algèbre locale O de rang fini sur le corps de base k et muni d'une application diagonale correspondant à la structure multiplicative de P ; si $\mathfrak{m}$ est l'idéal maximal de O , le dual de $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ est canoniquement isomorphe à $H^1(V , \underset{\sim}{O}_V)$ (cf. le paragraphe 3 ci-dessous). Ce n'est que lorsque le groupe de Picard est un groupe algébrique au sens classique, i. e. simple sur le corps de base k , que la dimension de $H^1(V , \underset{\sim}{O}_V)$ (toujours égale à celle de $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$) est égale à celle du groupe de Picard.

2. Schémas $\underset{\sim}{\mathrm{Hom}}_S(X , Y)$, $\prod_{X/S} Z$, $\underset{\sim}{\mathrm{Aut}}_S(X)$ etc.

Soient X , Y deux pré-schémas sur S ; pour tout pré-schéma T sur S , soient $X_T = X \times_S T$, $Y_T = Y \times_S T$ et considérons l'ensemble

$$F(T) = \mathrm{Hom}_T(X_T , Y_T) = \mathrm{Hom}_S(X_T , Y) = \mathrm{Hom}_S(X \times_S T , Y)$$

comme un foncteur contravariant en T . S'il est représentable, on dénote par $\underset{\sim}{\mathrm{Hom}}_S(X , Y)$ le pré-schéma sur S qui le représente, donc on a un isomorphisme fonctoriel

$$\mathrm{Hom}_S(T , \underset{\sim}{\mathrm{Hom}}_S(X , Y)) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Hom}_S(T \times_S X , Y)$$

Il y a bien des variantes de ce problème universel, dont la solution s'y ramène : pré-schéma des S-automorphismes d'un S-pré-schéma X (ce sera un pré-schéma en groupes), pré-schéma des S-homomorphismes d'un S-pré-schéma en groupes dans un autre (ce sera un pré-schéma en groupes commutatifs si le deuxième schéma en groupes est commutatif) etc. On peut aussi généraliser la définition de $\underset{\sim}{\mathrm{Hom}}_S(X , Y)$ en considérant un pré-schéma Z sur le pré-schéma X sur S , et le foncteur

$$F(T) = \mathrm{Hom}_{X_T}(X_T , Z_T)$$

(ensemble des "sections" de Z_T sur X_T) ; si ce foncteur est représentable, le S-pré-schéma qui le représente sera noté $\prod_{X/S} Z$, on aura donc par définition un isomorphisme fonctoriel

$$\mathrm{Hom}_S(T , \prod_{X/S} Z) = \mathrm{Hom}_{X_T}(X_T , Z_T)$$

Faisant $Z = Y \times_S X$, on retrouve $\underset{\sim}{\mathrm{Hom}}_S(X , Y)$. De ces définitions résulte pour les nouveaux pré-schémas ainsi introduits un formulaire aussi trivial qu'utile, que nous ne donnerons pas ici (vu qu'il vaut dans toute catégorie où les produits et produits fibrés existent). Plus sérieuse est la question de l'existence des schémas du type $\underset{\sim}{\mathrm{Hom}}_S(X , Y)$. On constate d'abord que pour X fixé, $\underset{\sim}{\mathrm{Hom}}_S(X , Y)$ ne peut exister pour tout Y sur S (ou $\prod_{X/S} Z$ pour tout Z sur X) que si X est plat sur S . De plus, on se convainc qu'il n'est raisonnable de s'attendre à l'existence d'une solution, pour des Y assez généraux, que si X est de plus propre sur S . Il semble par ailleurs que ces conditions soient suffisantes pour l'existence de $\underset{\sim}{\mathrm{Hom}}_S(X , Y)$ et $\prod_{X/S} Z$, à condition le cas échéant de faire une hypothèse genre "quasi-projective" sur Y/S resp. sur Z/X ; c'est ce qu'on peut vérifier en tous cas dans des cas assez nombreux (par exemple, lorsque Y est affine sur S , ou, par constructions directes élémentaires, lorsque X est fini sur S). Voici ce que donnent les théorèmes 1 et 2 :

PROPOSITION 2, 1. - Soient Λ un anneau noethérien, X et Y deux pré-schémas quelconques sur Λ, considérons le foncteur

$$F(A) = \mathrm{Hom}_A(X_A , Y_A)$$

sur la catégorie $\underset{\sim}{C}_o$ des Λ-algèbres artiniennes. Si X est plat sur Λ, ce foncteur est pro-représentable.

De plus, on vérifie que pour tout $A \in \underset{\sim}{C}_o$ et $\xi \in F(A)$, on a un isomorphisme canonique

$$F(I_A , \xi) = H^1(X_A , \underset{\sim}{\mathrm{Hom}}_{\underset{\sim}{O}_{X_A}}(\xi^*(\underset{\sim}{\Omega}^1_{Y_A/A}) , \underset{\sim}{O}_{X_A})$$

où $\underset{\sim}{\Omega}^1_{Y_A/A}$ est le faisceau des 1-différentielles de Kähler de Y_A par rapport à A. Prenant pour A un corps, on trouve, utilisant A. 5, 1. et le théorème de finitude de [2] le corollaire suivant :

COROLLAIRE. - Supposons X plat et propre sur S, Y localement de type fini sur S. Alors F est pro-représentable et les composants locaux de la Λ-algèbre topologique correspondante sont des anneaux <u>noethériens</u>.

REMARQUES. - Les problèmes envisagés dans ce numéro, et de nombreux autres, étaient étudiés communément, dans le cadre de la géométrie algébrique classique, à l'aide des "coordonnées de Chow" des cycles dans l'espace projectif, permettant de considérer ces cycles comme des points de variétés projectives convenables. Ce procédé, et de façon générale l'utilisation des coordonnées de Chow, semble irrémédiablement insuffisant dans le point de vue des schémas, car il détruit les éléments nilpotents dans les variétés de paramètres, et en particulier, ne se prête pas à une étude satisfaisante des variations infinitésimales de cycles (sans compter sa nature non intrinsèque, liée à l'espace projectif). Le langage des coordonnées de Chow était malheureusement le seul utilisé par de nombreux géomètres algébristes pour l'étude des familles de variétés ou des familles de cycles, ce qui semble avoir été un obstacle sérieux à la clarification de ces notions, malgré son intérêt technique certain (probablement provisoire). Si on veut obtenir l'analogue des variétés de Chow en théorie des schémas, on est conduit au problème universel suivant : soit X un pré-schéma sur S, pour tout pré-schéma T sur S, on considère l'ensemble $F(T)$ des sous-pré-schémas <u>fermés</u> de $X_T = X \times_S T$ qui sont <u>plats</u> sur T. On essaie de représenter ce foncteur en T à l'aide d'un pré-schéma sur S. Plus généralement, on peut se donner un faisceau quasi-cohérent G sur X, et prendre pour $F(T)$ l'ensemble des faisceaux quotients de G_T qui sont plats sur T. Il semble qu'il existe une solution du problème, avec un schéma C localement de type fini sur S, lorsque X est propre sur S localement noethérien et lorsque F est de plus cohérent. En tous cas, supposant seulement S localement noethérien, la restriction de F aux " S-algèbres artiniennes" est pro-représentable, et si de plus X est propre sur S et F cohérent, les composants locaux de l'anneau topologique O correspondants sont noethériens. Bien entendu, même une fois prouvée l'existence du "schéma de Chow" de X sur S, il restera à en trouver une décomposition en ouverts disjoints C_i (correspondants à la fixation d'invariants continus tels que degré et dimension des cycles qu'on fait varier), qui soient de <u>type fini</u> (et non seulement localement de type fini) sur S, à préciser les relations de ce schéma avec les classiques variétés de Chow et à préciser quand un C_i est même <u>projectif</u> ou du moins quasi-projectif sur S.

3. Schémas de Picard.

Soit $f : X \to S$ un S-pré-schéma, considérons le faisceau multiplicatif $\underset{\sim}{O}_X^*$ des unités du faisceau structural de X, et le groupe

$$P(X/S) = H^0(S, R^1 f_*(\underset{\sim}{O}_X^*))$$

appelé <u>groupe de Picard relatif</u> de X/S. Un élément de ce groupe est donc défini en se donnant un recouvrement ouvert (U_i) de S, et un faisceau inversible $\underset{\sim}{L}_i$ sur chaque $f^{-1}(U_i)$, de telle façon que pour tout couple (i, j), $\underset{\sim}{L}_i | f^{-1}(U_i \cap U_j)$ soit isomorphe à $\underset{\sim}{L}_j | f^{-1}(U_i \cap U_j)$, du moins localement au-dessus de $U_i \cap U_j$ (i. e. ces deux faisceaux sont "équivalents" au sens de [3], B, 4.) Si X/S admet une section, alors $P(X/S)$ n'est autre que l'ensemble des classes de faisceaux inversibles sur X/S à "équivalence" près (loco citato). Posons maintenant, pour tout T sur S :

$$F(T) = P(X_T/T)$$

on obtient un foncteur covariant en T, qu'on pourra appeler le <u>foncteur de Picard</u> de X/S ; si ce foncteur est représentable, le pré-schéma sur S qui le représente sera appelé le <u>pré-schéma de Picard</u> de X/S et noté $\underset{\sim}{P}(X/S)$. On aura donc un isomorphisme de foncteurs :

$$\mathrm{Hom}_S(T, \underset{\sim}{P}(X/S)) \xrightarrow{\sim} P(X_T/T) \quad .$$

La formation de pré-schémas de Picard est compatible avec l'extension de la base, en particulier, les pré-schémas de Picard des fibres de X sur S (qui sont des pré-schémas sur les corps résiduels $k(s)$ des $s \in S$) sont les fibres de $\underset{\sim}{P}(X/S)$. Bien entendu, comme $P(X_T/T) = F(T)$ est un groupe commutatif, les pré-schémas de Picard sont des pré-schémas en groupes. Notons aussi que les jacobiennes généralisées de ROSENLICHT ne sont autres que les composantes connexes de l'unité dans les schémas de Picard de courbes complètes pouvant avoir des singularités, ce qui devrait rendre évidentes la plupart de leurs propriétés (une fois démontrée l'existence).

REMARQUE. - La définition adoptée ici n'est raisonnable que lorsque tout point de Y admet un voisinage ouvert U sur lequel X admette une section. Dans le cas général, il faut modifier un peu la définition du foncteur de Picard, pour pouvoir obtenir encore un théorème d'existence.

Ici, les conditions plausibles d'existence d'un pré-schéma de Picard sont les suivantes : X est propre et plat sur S , $f_*(\underset{\sim}{O}_X) = \underset{\sim}{O}_S$, et X admet localement une section sur S . Cette condition s'introduit de façon naturelle dans l'application de la technique de descente, pour éliminer les automorphismes d'un faisceau inversible $\underset{\sim}{L}$ sur X en le munissant d'une section marquée au-dessus de la section s ([3], B, 4). On trouve notamment :

PROPOSITION 3, 1. - Supposons X plat sur $S = \mathrm{Spec}(\Lambda)$, Λ noethérien, et que pour tout T de type fini sur S , on ait $f_{T*}(\underset{\sim}{O}_{X_T}) = \underset{\sim}{O}_T$ (si f est propre et à fibres séparables ou si S est le spectre d'un corps, il résulte de Künneth que la dernière condition équivaut à $f_*(\underset{\sim}{O}_X) = \underset{\sim}{O}_S$. Alors le foncteur de Picard de X/S sur la catégorie des Λ-algèbres artiniennes est pro-représentable.

De plus, on aura ici :

$$F(I_A , \xi) = H^1(X_A , \underset{\sim}{O}_{X_A})$$

en particulier :

COROLLAIRE. - Si X est propre sur S , alors les composants locaux de la Λ-algèbre topologique O correspondant au foncteur de Picard sont noethériens.

REMARQUES. - On peut généraliser les définitions et résultats de ce numéro à la classification des fibrés principaux sur X , à groupe structural un schéma en groupes G sur S qui est affine et plat sur S , et commutatif. Dans le cas ou G ne serait pas commutatif, donc le fibré en groupes adjoint d'un fibré principal (dont les sections sont les automorphismes du fibré principal) n'est plus trivial, la proposition 3, 1 ne reste plus valable telle quelle. On peut cependant modifier le problème universel de façon à obtenir encore une solution (du moins, pour l'instant, en géométrie formelle). La règle d'or à retenir, dans le contexte du présent numéro et des suivants, et chaque fois qu'on cherche des "schémas de modules" pour des classes d'objets qui ne sont définis qu'à un isomorphisme près, reste toujours la suivante : éliminer les automorphismes éventuels des objets qu'on veut classifier, par l'introduction si besoin est de structures auxiliaires (points ou éléments de sections marquées, fixation de formes différentielles, etc.), qu'on prendra assez anodines pour ne pas modifier de façon substantielle le problème initial.

4. Modules formels d'une variété.

Soit Λ un anneau local noethérien de corps résiduel k (le plus souvent, Λ sera égal à k, ou à un p-anneau de Cohen) X_0 un pré-schéma sur k. Pour toute Λ-algèbre artinienne locale A, on considère l'ensemble $F(A)$ des classes à un isomorphisme près de A-pré-schémas X plats sur A, munis d'un isomorphisme

$$(*) \qquad X \otimes_A \kappa(A) \xleftarrow{\sim} X_0 \otimes_k \kappa(A)$$

où $\kappa(A)$ est le corps résiduel de A ; bien entendu, les isomorphismes entre tels A-pré-schémas plats doivent respecter l'isomorphisme précédent donné dans la structure. Si A est une Λ-algèbre artinienne non nécessairement locale, de composantes locales A_i, on prend pour $F(A)$ le produit des $F(A_i)$. Ainsi F devient un foncteur multiplicatif en A, qu'on pourra appeler le foncteur des modules pour X_0 (et Λ). Si ce foncteur est représentable, il lui correspond une Λ-algèbre topologique O locale, de corps résiduel k, et le spectre formel de O sera appelé schéma formel des modules pour X_0 (et Λ), cf. [2] pour quelques détails sur cette notion.

Ici, pour appliquer la technique de descente, les automorphismes "finis" de X_0 sont inoffensifs, car ils sont sans influence sur l'existence d'automorphismes (au sens précisé plus haut) des A-pré-schémas X ; la condition nécessaire et suffisante, lorsque A n'est pas réduit à un corps, pour que X n'ait pas de A-automorphisme non trivial, est qu'on ait

$$H^0(X_0\ ,\ \mathfrak{G}_{X_0/k}) = 0$$

où $\mathfrak{G}_{X_0/k}$ désigne le faisceau des k-dérivations (= faisceau tangent) de X_0. On trouve d'ailleurs facilement (du moins si X_0 est simple sur k),

$$F(I_A\ ,\ \xi) = H^1(X_A\ ,\ \mathfrak{G}_{X_A/A})$$

On en conclut alors, comme d'habitude :

PROPOSITION 4, 1. - Supposons que $H^0(X_o, \mathcal{G}_{X_o/k}) = 0$. Alors le schéma formel des modules pour X_o existe. Si de plus X_o est propre sur k, le schéma formel des modules est noethérien.

REMARQUES.

1° Lorsque X_o n'est pas supposé simple sur k, $F(I_A, \xi)$ s'identifie à un sous-A-module de

$$\mathrm{Ext}^1_{\underset{\sim}{O}_{P_A}}(P_A ; \underset{\sim}{I}_{X_A}, \underset{\sim}{O}_{X_A})$$

où on pose $P_A = X_A \times_A X_A$, où $\underset{\sim}{O}_{X_A}$ est regardé comme un faisceau cohérent sur P_A grâce au morphisme diagonal $X_A \to P_A$, et où $\underset{\sim}{I}_{X_A}$ désigne le faisceau cohérent d'idéaux sur P_A défini par le morphisme diagonal. De façon précise, une globalisation facile de la théorie de Hochschild montre que le Ext^1 ci-dessus s'identifie à l'ensemble des classes, à un isomorphisme près, de faisceaux de I_A-algèbres plates $\underset{\sim}{O}$ sur X_A, munies d'un isomorphisme d'augmentation $\underset{\sim}{O} \otimes_{I_A} A \to \underset{\sim}{O}_{X_A}$ (on rappelle que l'on pose $I_A = At/(t^2)$). Le sous-module $F(I_A, \xi)$ est celui qui correspond aux faisceaux d'algèbres <u>commutatives</u>. Les hypothèses de simplicité ne sont donc pas essentielles en théorie des modules, comme [2] le laissait entendre.

2° Rappelons (loco citato) qu'en particulier, toute <u>courbe algébrique</u> X_o <u>simple</u> et <u>propre</u> sur k admet un schéma formel des modules, simple sur Λ, de dimension relative $3g - 3$ si le genre g est $\geqslant 2$, g si $g = 0$ ou 1. Ces deux derniers cas ne rentrent plus directement dans la proposition 4, 1. On pourrait cependant s'y ramener, dans le cas des courbes elliptiques ($g = 1$) grâce aux considérations qui vont suivre.

On peut bien entendu, varier ad libitum la proposition 4, 1 en considérant des systèmes de schémas sur k, munis de structures diverses. Supposons par exemple, que X_o soit un <u>schéma abélien</u> sur k, à point origine marqué (i. e. X_o est considéré comme un schéma en <u>groupes</u> sur k), et soit $F(A)$ l'ensemble des classes à un isomorphisme près, de schémas <u>abéliens</u> sur A (i. e. de schémas en groupes propres et simples sur A) munis d'un isomorphisme de schémas abéliens (*). On vérifie que l'imposition d'une structure multiplicative (et même seulement, d'une "section unité") élimine les automorphismes infinitésimaux, et qu'il existe par suite un schéma formel de modules, correspondant à un anneau local complet noethérien O. On peut d'ailleurs montrer que, si X est un schéma propre et simple à fibres "absolument connexes" au-dessus d'un pré-schéma localement noethérien S, toute structure multiplicative sur X admettant une section unité est nécessairement associative et commutative (pourvu du moins qu'elle le soit sur <u>une</u> fibre et que S soit connexe) et est de plus uniquement déterminée par la connaissance de la section unité. De plus, supposant que S est le spectre d'un anneau local artinien A de corps résiduel k, X propre sur A et muni d'une section s, et enfin $X \otimes_A k$ muni d'une structure de schéma abélien sur k, admettant pour élément neutre le point de $X \otimes_A k$ correspondant à s, un calcul facile d'obstructions joint à un raisonnement dû à SERRE permet de prouver qu'il existe effectivement sur X une structure multiplicative admettant la section s comme section unité. (A partir de là, utilisant le "théorème d'existence" de [2] pour passer au cas où A est noethérien local complet, puis la technique de descente de [3] pour le cas général, on peut prouver l'énoncé analogue pour tout S localement noethérien connexe). Cela prouve que le foncteur $F(A)$ considéré ici est isomorphe au foncteur analogue défini au début de ce numéro en faisant abstraction de la structure multiplicative sur X_0. Il s'ensuit en particulier que, si $\mathfrak{m}$ est l'idéal maximal de O, $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ est canoniquement isomorphe au dual de $H^1(X_0, \mathcal{G}_{X_0/k})$ et est donc de dimension n^2, où $n = \dim X_0$. Il serait fort intéressant de déterminer si O est bien simple sur Λ, i. e. isomorphe à une algèbre de séries formelles à n^2 indéterminées sur Λ. Le paragraphe 1, proposition 5, 2 permet de donner une formulation équivalente de ce problème comme un problème d'existence de schémas abéliens se réduisant suivant un schéma abélien donné. On voit en tous cas, par voie transcendante, que la réponse est affirmative si k est de caractéristique 0. En caractéristique $p \neq 0$, il suffit évidemment de se borner au cas où Λ est l'anneau des vecteurs de Witt construit sur un corps algébriquement clos k. Ce serait peut-être le moment pour le "foncteur de Greenberg" de faire ses preuves...

5. Extension des revêtements.

Soient $\mathfrak{X}$ un pré-schéma formel noethérien [2], U une partie ouverte de $\mathfrak{X}$, définie localement par la "non annulation" d'une section de $O_{\mathfrak{X}}$ qui est non diviseur de zéro, donc assez gros pour que toute section de $O_{\mathfrak{X}}$ sur un ouvert V nulle sur $U \cap V$ soit nulle. Soit $\mathcal{J}$ un "idéal de définition" pour $\mathfrak{X}$, et soit $X_n = (\mathfrak{X}, O_{\mathfrak{X}}/\mathcal{J}^{n+1})$, qui est donc un pré-schéma noethérien ordinaire. Si alors $\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{X}''$ sont deux revêtements plats de $\mathfrak{X}$, (i. e. deux pré-schémas sur $\mathfrak{X}$ définis par des faisceaux d'algèbres qui sont cohérents et localement libres comme faisceaux de modules), non ramifiés sur U, l'application évidente

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{X}}(\mathfrak{X}', \mathfrak{X}'') \longrightarrow \mathrm{Hom}_{X_0}(X'_0, X''_0)$$

est injective, en particulier un automorphisme de $\mathfrak{X}'$ qui induit l'identité sur X'_0 est l'identité. Cela permet d'appliquer à la situation la technique de descente. Partons en particulier, d'un revêtement plat X'_0 de X_0, non ramifié au-dessus de U_o , soit $G(\mathfrak{X})$ l'ensemble des classes, à un isomorphisme près (induisant l'identité sur X'_o) de revêtements plats $\mathfrak{X}'$ de $\mathfrak{X}$ qui induisent X'_o sur X_o (et sont donc nécessairement non ramifiés sur U). On définit de même $G(V)$ pour toute partie ouverte V de $\mathfrak{X}$, et plus généralement $G(\mathfrak{Y})$ pour tout pré-schéma formel $\mathfrak{Y}$ au-dessus de $\mathfrak{X}$. Cela dit, les résultats de [2] et [3] impliquent d'abord les résultats suivants :

a. Lorsque V est un ouvert variable de $\mathfrak{X}$, les $G(V)$ forment un <u>faisceau</u> sur $\mathfrak{X}$, soit $\underline{G}_{\mathfrak{X}} = \underline{G}$. La restriction de ce faisceau à U est le faisceau <u>constant</u> dont les fibres sont réduites à un élément.

De façon plus générale, la détermination des fibres de $\underline{G}_{\mathfrak{X}}$ est une question d'anneaux locaux complets, de façon précise :

b. Pour tout $x \in \mathfrak{X}$, on a $\underline{G}_x = G(\mathrm{Spec}(\hat{\underline{O}}_{\mathfrak{X},x}))$ (= classes à un isomorphisme près d'algèbres finies et libres B sur $\hat{\underline{O}}_{\mathfrak{X},x}$ munies d'un isomorphisme de $B \otimes_{\hat{\underline{O}}_{\mathfrak{X},x}} \underline{O}_{X_o,x}$ avec $\underline{O}'_{ox}$, où $\underline{O}'_o$ est le faisceau d'algèbres sur X_o qui définit X'_o).

c. On a un isomorphisme canonique $\underline{G}_{\mathfrak{X}} = \varprojlim \underline{G}_{\mathfrak{X}_n}$, en d'autres termes, pour tout ouvert V de $\mathfrak{X}$, on a $G(V) = \varprojlim G(V_n)$.

d. Supposons que $\mathfrak{X}$ se déduise d'un schéma ordinaire <u>propre</u> X sur un anneau local noethérien complet Λ ayant un idéal de définition $\mathfrak{m}$, en prenant le complété $\underline{J}$-adique de $\underline{O}_X$, où $\underline{J} = \mathfrak{m}.\underline{O}_X$. Alors $G(\mathfrak{X})$ est canoniquement isomorphe à l'ensemble des classes de revêtement plats du schéma <u>ordinaire</u> X qui "se réduisent suivant X'_o ".

De façon imagée, on peut dire que (a) et (b) établissent les relations fondamentales entre l'aspect local et l'aspect global du problème, (c) donne les relations entre l'aspect "fini" et l'aspect "infinitésimal" , enfin (d) rappelle (sous les conditions précisées) l'identité entre l'aspect "formel" et l'aspect "algébrique".

Supposons maintenant que $\mathfrak{X}$ soit défini sur un anneau local noethérien complet Λ , avec $\underline{J} = \mathfrak{m}\underline{O}_{\mathfrak{X}}$ (donc X_o est un pré-schéma sur $\Lambda/\mathfrak{m}$). Pour toute algèbre A finie sur Λ , posons

$$F(A) = G(\mathfrak{X} \times_{\Lambda} A) \quad .$$

C'est un foncteur covariant en A , à valeurs dans la catégorie des ensembles, et d'après (c) ce foncteur est complètement connu si on le connaît pour A artinien ; et il revient au même de dire que ce foncteur est pro-représentable, i. e. de la forme

$$F(A) = \mathrm{Hom}_{\Lambda\text{-algèbres top.}}(\mathcal{O} , A)$$

où $\mathcal{O}$ ~~est une~~ Λ-algèbre topologique du type envisagé dans A, paragraphe 5, ou de dire qu'il en est de même quand on se restreint aux A artiniens. La conjonction des théorèmes 1 et 2 implique alors effectivement:

PROPOSITION 5, 1. - Le foncteur précédent est pro-représentable.

Bien entendu, d'après (a), si $U = \mathcal{X}$, $G(\mathcal{Y})$ est réduit à un seul élément pour tout $\mathcal{Y}$ sur $\mathcal{X}$, et le foncteur F est alors sans grand intérêt (on aura $\mathcal{O} = \Lambda$). Il semble que dans pratiquement tout autre cas, l'anneau local topologique $\mathcal{O}$ n'ést pas noethérien. Son existence met néanmoins en évidence, de façon frappante, la nature "continue" de l'ensemble $G(\mathcal{X})$ des solutions (correspondant intuitivement au fait qu'il y a un choix "continu" dans la façon dont la ramification se propage quand on fait une extension de X'_o). On comparera ce résultat avec le point de vue de J. P. SERRE [4] en théorie du corps de classes local, mettant lui aussi en évidence le caractère continu du groupe de Galois topologique de l'extension abélienne maximale d'un corps local "géométrique", le groupe dual (au sens de Pontrjagin) y apparaissant comme une limite inductive de groupes algébriques (ou du moins quasi-algébriques) ; ici aussi, la classification des extensions est donnée par des "variétés" de dimension infinie. D'ailleurs, on peut prendre dans ce qui précède pour $\mathcal{X}$ le spectre formel d'un anneau local complet (dont Λ sera par exemple, un sous-anneau de Cohen), et on peut espérer que les résultats de ce numéro puissent être utilisés dans l'étude des extensions d'un anneau local complet de dimension >1. Aussi bien dans le cas local que global, ils permettront peut-être de formuler des relations précises entre les phénomènes de ramification supérieure, et des phénomènes en caractéristique 0 (abordables par voie transcendante). En tous cas, c'est l'analyse préliminaire à la proposition 5, 1 qui permet d'étendre au cas "tamely ramified" les méthodes exposées dans [2] pour l'étude du groupe fondamental, et de résoudre par voie transcendante le "problème des trois points".

Pour finir, signalons que la situation se simplifie lorsque X_o est de dimension 1 : alors, en vertu de (a) et (b) $G(\mathcal{X})$ s'identifie à $\prod_i G(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\mathcal{X},x_i}))$, où les x_i sont les points de $X_o - U$: on peut se donner arbitrairement les extensions "locales" aux points de ramification. De plus, lorsque X_o est normale, on constate que le schéma formel des modules garanti par 5, 1 est simple sur $\mathrm{Spec}(\Lambda)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] GROTHENDIECK (Alexander). - Sur quelques points d'algèbre homologique, Tohoku math. J., t. 9, 1957, p. 119-221.

[2] GROTHENDIECK (Alexander). - Géométrie formelle et géométrie algébrique, Séminaire Bourbaki, t. 11, 1958/59, fasc. 3, n° 182.

[3] GROTHENDIECK (Alexander). - Technique de descente et théorèmes d'existence en géométrie algébrique, I : Généralités, Descente par morphismes fidèlement plats, Séminaire Bourbaki, t. 12, 1959/60, fasc. 1, n° 190.

[4] SERRE (Jean-Pierre). - Corps locaux et isogénies, Séminaire Bourbaki, t. 11, 1958/59, fasc. 3, n° 185.

ERRATUM à l'exposé n° 182 (Mai 1959)

GÉOMÉTRIE FORMELLE ET GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Page 23 , ligne 12 (1re ligne du COROLLAIRE 5) :

ajouter : " X ou Y étant propre sur k " .

TECHNIQUES DE CONSTRUCTION ET THÉORÈMES D'EXISTENCE EN GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE
III : PRÉSCHEMAS QUOTIENTS

par Alexander GROTHENDIECK

Introduction.

Les problèmes traités dans le présent exposé diffèrent de ceux envisagés dans les deux précédents, en ce qu'on essaye de représenter certains foncteurs covariants, et non plus contravariants, de schémas variables. Le procédé de passage au quotient est cependant essentiel dans beaucoup de questions de construction en géométrie algébrique, y compris celles des exposés I et II ([1], [2]). Ainsi, la question de l'effectivité d'une donnée de descente sur un T-préschéma X, relativement à un morphisme fidèlement plat et quasi-compact $T \to S$, équivaut à la question de l'existence d'un quotient de X (satisfaisant les propriétés raisonnables examinées plus bas), pour la relation d'équivalence plate dans X définie par la donnée de descente ; les questions soulevées dans [1], A, § 2 c se résoudront sans doute en même temps que les questions posées dans le paragraphe numéro 2 du présent exposé. De même, le schéma de Picard (pour la définition, cf. [2], C, § 3) d'un S-schéma X peut se définir de diverses manières comme quotient de certains autres schémas (de diviseurs positifs, ou d'immersions dans un projectif) par des relations d'équivalence plates, la définition et la construction de ces schémas auxiliaires étant d'ailleurs techniquement plus simple : ce sont en effet des schémas du type $\underline{\mathrm{Hom}}_S(X, Y)$ et variantes définis dans [2], C, § 2, et dont la construction sera l'objet de l'exposé suivant (sous des hypothèses de projectivité convenables). Combinant donc les résultats du présent exposé et du suivant, on arrive à la construction des schémas de Picard, sous des hypothèses convenables.

Le problème du passage au quotient dans les préschémas offre encore plusieurs questibns non résolues. La plus importante est mentionnée dans le paragraphe 8. Elle reste actuellement le seul obstacle à la construction des schémas de module sur les entiers pour les courbes de genre arbitraire, les variétés abéliennes polarisées, etc. C'est dire que sa solution mérite les efforts des spécialistes des groupes algébriques.

1. Relations d'équivalence, relations d'équivalence effectives.

Soient $\underset{\sim}{C}$ une catégorie, et X un objet de $\underset{\sim}{C}$. Un couple de morphismes

$$p_1 , p_2 : R \rightrightarrows X$$

est dit "couple d'équivalence" dans $\underset{\sim}{C}$, de but X et de source R, si pour tout objet T de $\underset{\sim}{C}$, les deux applications correspondantes

$$p_1(T) , p_2(T) : R(T) \rightrightarrows X(T)$$

(où pour tout objet Y de $\underset{\sim}{C}$, on pose $Y(T) = \mathrm{Hom}(T , Y)$) définissent une application

$$R(T) \to X(T) \times X(T)$$

induisant une bijection de $R(T)$ sur le graphe d'une relation d'équivalence dans l'ensemble $X(T)$. On introduit entre les couples d'équivalences de but X une relation d'équivalence évidente, une classe d'équivalence pour cette dernière est appelée une $\underset{\sim}{C}$-relation d'équivalence dans X, ou simplement une relation d'équivalence si aucune confusion n'en résulte.

Si $X \times X$ existe, la donnée d'une relation d'équivalence dans X équivaut à la donnée d'un sous-objet R de $X \times X$, tel que, pour tout objet T de $\underset{\sim}{C}$, le sous-ensemble de $(X \times X)(T) = X(T) \times X(T)$ qui correspond à $R(T)$ soit le graphe d'une relation d'équivalence dans $X(T)$. Désignant par p_1 et p_2 les morphismes de R dans X induits par les projections pr_1 et pr_2, la condition précédente exprime que (p_1 , p_2) est un couple d'équivalence. On peut aussi exprimer diagrammatiquement dans $\underset{\sim}{C}$ (sous réserve de l'existence de $X \times X$ et du produit fibré $(R , p_2) \times_X (R , p_1)$) les axiomes d'une relation d'équivalence au sens ensembliste pour les $R(T)$ dans les $X(T)$, conformément au principe général expliqué dans [2], A, § 1. Nous n'en aurons pas besoin.

Chaque fois qu'on a un couple de morphismes (p_1 , p_2) de même source R et de même but X, on peut définir le conoyau du couple comme l'objet Y de $\underset{\sim}{C}$ qui représente le foncteur covariant en Z :

$$\mathrm{Hom}_{p_1 , p_2}(X , Z) ,$$

ensemble des morphismes u de X dans Z tels que $up_1 = up_2$. Si Y existe, il est déterminé à un isomorphisme unique près. On le notera $Y/(p_1 , p_2)$ ou, par abus de notation, Y/R, cette dernière notation étant surtout employée lorsque

(p_1, p_2) est un couple d'équivalence : il est d'usage alors d'identifier dans les notations la relation d'équivalence définie par le couple, et R. Noter que si on considère Y comme un quotient de X, il ne dépend en effet que de la relation d'équivalence définie par le couple (p_1, p_2).

Partons maintenant d'un morphisme

$$f : X \to Y$$

qui permet donc de considérer X comme un "objet au-dessus de Y", et supposons que le produit fibré

$$\underset{\sim}{R}(f) = X \times_Y X$$

existe. Soient p_1 et p_2 ses deux projections. Alors (p_1, p_2) est un couple d'équivalence, dit associé au morphisme f. Il définit donc une relation d'équivalence, dite associée à f.

On dit qu'un couple de morphismes (p_1, p_2) de but X, de même source R, est un couple d'équivalence effectif, si

(i) le conoyau $X/(p_1, p_2) = Y$ existe

(ii) le produit fibré $X \times_Y X$ existe

(iii) le morphisme $R \to X \times_Y X$ de composantes p_1 et p_2 est un isomorphisme.

Alors le couple (p_1, p_2) est bien un couple d'équivalence. On dit aussi que la relation d'équivalence qu'il définit est une relation d'équivalence effective.

On dit qu'un morphisme $f : X \to Y$ est un épimorphisme effectif si

(i) le produit fibré $X \times_Y X = R$ existe ;

(ii) le quotient $X/(p_1, p_2)$ existe, où p_1 et p_2 sont les deux projections de R dans X ;

(iii) le morphisme $X/(p_1, p_2) \to Y$ induit par f est un isomorphisme.

Alors f est bien un épimorphisme, et même un épimorphisme strict (cf. [1], A, § 2. 3) ; la réciproque étant vraie si le produit fibré $X \times_Y X$ existe. On dit aussi que l'objet quotient de X défini par l'épimorphisme f est un quotient effectif de X.

Les définitions précédentes impliquent la "correspondance galoisienne" suivante :

PROPOSITION 1.1. — Il y a correspondance biunivoque, respectant les ordres naturels, entre l'ensemble des relations d'équivalence effectives R dans X, et l'ensemble des quotients effectifs Y de X, à R correspondant le quotient effectif X/R, et à Y correspondant la relation d'équivalence effective définie par la projection canonique $X \to Y$, (qui est définie par le produit fibré $X \times_Y X$ muni de ses deux projections).

Dans les très bonnes catégories (ensembles, faisceaux d'ensembles, etc.) tout quotient est effectif, et toute relation d'équivalence est effective. Il n'en est plus de même dans les catégories telles que la catégorie des préschémas au-dessus d'un préschéma S donné, même lorsque S est le spectre d'un corps, et même en se bornant aux schémas finis sur S. Les questions d'effectivité, et même (dans le cas de préschémas non finis sur S) les questions d'éxistence de quotients, s'avèrent le plus souvent délicates.

2. Exemple : préschémas finis sur S.

Soit $\underset{\sim}{C}$ la catégorie des préschémas finis sur S, supposé localement noethérien. Elle est équivalente à la catégorie opposée de la catégorie des faisceaux cohérents d'algèbres commutatives sur S, ou encore, si S est affine d'anneau A, à la catégorie opposée de la catégorie des A-algèbres finies sur A (i. e. qui sont des modules de type fini sur A). On en conclut tout de suite que dans $\underset{\sim}{C}$ les limites projectives finies et les limites inductives finies existent. C'est bien connu (sans aucune hypothèse de finitude...) pour les premières. Ainsi le produit fibré de préschémas X, Y sur S correspond au produit tensoriel $B \otimes_A C$ des algèbres correspondantes, le noyau de deux morphismes $X \rightrightarrows Y$, défini par deux homomorphismes de A-algèbres $u , v : C \rightrightarrows B$, correspond au quotient de B par l'idéal engendré par les $u(c) - v(c)$, etc. Pour les limites inductives finies, il suffit de considérer d'une part les sommes finies, qui correspondent au produit ordinaire de A-algèbres, et d'autre part les conoyaux de couples de morphismes $X \rightrightarrows Y$, qui correspondent en effet, (comme on constate aussitôt) au sous-anneau de C ensemble des éléments où les homomorphismes $u , v : C \rightrightarrows B$ coïncident (ce dernier est fini sur A grâce à l'hypothèse noethérienne). Notons d'ailleurs qu'on peut montrer, utilisant l'hypothèse noethérienne, que les limites inductives finies, et en particulier les quotients, ainsi construits dans la catégorie $\underset{\sim}{C}$ des préschémas finis sur S, sont en réalité des quotients dans la catégorie de <u>tous</u> les préschémas.

Comme nous avons dit dans [1], il y a dans $\underset{\sim}{C}$ des épimorphismes non effectifs (ou stricts, cela revient au même puisque les produits fibrés existent). J'ignore si les relations d'équivalence sont toujours effectives, lorsqu'on ne fait pas d'hypothèse de platitude. Je n'ai obtenu, dans cette direction, que des résultats très partiels, positifs, indispensables pour la démonstration du théorème fondamental en théorie formelle des modules (cf. [2], B, th. 1). Signalons qu'il est facile dans le problème posé de se ramener au cas où S est le spectre d'un anneau A artinien local, de corps résiduel algébriquement clos. Mais même si A est un corps, la réponse n'est pas connue.

On peut aussi considérer le cas d'un préschéma X sur S qui n'est plus supposé fini sur S, mais en considérant une relation d'équivalence R dans X telle que $p_1 : R \to X$ soit un morphisme fini. On dit alors que R est une relation d'équivalence finie. Supposant pour simplifier S et X affines (donc R affine, de sorte que la situation est ramenée à une situation de pure algèbre commutative), on ignore même dans ce cas s'il existe un quotient $X/R = Y$ et si le morphisme canonique $X \to Y$ est fini. (Le cas le plus simple est celui où on suppose que S est le spectre d'un corps k, et où X est le spectre de $k[t]$, i. e. la droite affine). Bien entendu, si les deux problèmes précédents se résolvent par l'affirmative, on peut conclure dans la situation présente que R est effective. Notons que le problème de l'existence d'un quotient Y et de la finitude de $f : X \to Y$ se pose dans exactement les mêmes termes si, au lieu d'un graphe d'équivalence dans X, on a seulement un prégraphe d'équivalence dans X, au sens du paragraphe 4.

La question du passage au quotient par une relation d'équivalence finie plus ou moins arbitraire se pose dans la construction des préschémas par "recollement" de préschémas donnés X_i suivant certains sous-préschémas fermés ; la loi du recollement s'exprime précisément par une relation d'équivalence finie dans le préschéma somme X des X_i. Il faut s'attendre aussi que la solution des problèmes posés ici et de diverses variantes, sera une condition préliminaire à la mise au point d'une technique générale de constructions non projectives, dans la direction inaugurée dans [2].

Le seul fait général positif connu du rédacteur est le suivant :

PROPOSITION 2.1. - Soient S un préschéma localement noethérien, s un point de S, et Ω une extension algébriquement close de $k(s)$. Considérons le "foncteur-fibre" correspondant F , associant à tout S-schéma X fini sur S , l'ensemble des points de X/S à valeurs dans Ω . Ce foncteur (trivialement exact à gauche) est <u>exact à droite</u>, i. e. commute aux limites inductives finies, et en particulier aux conoyaux de couples de morphismes.

En utilisant ce résultat pour tous les "points géométriques" de S , on en déduit que la catégorie C' "quotient" de C , obtenue en raisonnant "modulo morphismes surjectifs radiciels" (i. e. obtenue en adjoignant formellement des inverses pour les morphismes en question), est une catégorie "géométrique", i. e. satisfait les mêmes propriétés "de nature finie" que la catégorie des ensembles. En particulier, toute relation d'équivalence y est effective. Cela implique que si R est une relation d'équivalence dans un X fini sur S , alors le morphisme canonique $R \to X \times_Y X$ (où $Y = X/R$) est <u>radiciel et surjectif</u> (en fait une immersion fermée surjective, puisque c'est un monomorphisme).

3. <u>Cas d'un groupe d'opérateurs.</u>

On suppose de nouveau que $\underset{\sim}{C}$ est une catégorie quelconque. Soient G , X des objets de $\underset{\sim}{C}$, et supposons que G est un $\underset{\sim}{C}$-groupe d'opérateurs sur l'objet X de $\underset{\sim}{C}$. Cela signifie (cf. [2], A, § 1) que pour tout objet T de $\underset{\sim}{C}$, on s'est donné une structure de groupe sur $G(T)$ et une structure d'ensemble à groupe d'opérateurs $G(T)$ sur $X(T)$, de telle façon que pour T variable, les structures en question "varient fonctoriellement" avec T . Si dans $\underset{\sim}{C}$ les produits $G \times G$ et $G \times X$ existent, une telle structure peut encore se définir comme un couple de morphismes

$$G \times G \to G , \qquad \pi : G \times X \to X$$

soumis à la condition que pour tout objet T de $\underset{\sim}{C}$, les lois de composition correspondantes pour les ensembles $G(T)$ et $X(T)$ fassent de $G(T)$ un groupe opérant sur $X(T)$. La traduction de cet axiome par la commutativité de certains diagrammes dans $\underset{\sim}{C}$ est facile, mais fastidieuse, et en fait, parfaitement inutile dans tous les cas à ma connaissance.

Supposons que $G \times X$ existe, et considérons les deux morphismes

$$p_1 , p_2 : G \times X \rightrightarrows X$$

avec

$$p_1 = pr_1 \quad , \quad p_2 = \pi \quad .$$

On constate aussitôt que le couple (p_1 , p_2) est un couple d'équivalence si, et seulement si, pour tout objet T de $\underset{\sim}{C}$, l'application

$$G(T) \times X(T) \simeq (G \times X)(T) \to X(T) \times X(T) ,$$

définie par ce couple, est injective, i. e. si le groupe $G(T)$ opère librement sur l'ensemble $X(T)$, i. e. $g \in G(T)$, $x \in X(T)$, $g.x = x$ implique $g =$ élément unité du groupe $G(T)$. On dit alors que G opère librement sur X, (ou que X est un $\underset{\sim}{C}$-espace principal sous G). La relation d'équivalence associée au couple (p_1 , p_2) est alors appelée la relation d'équivalence définie par le groupe G opérant librement sur X. Lorsque $X \times X$ existe également et qu'on considère le morphisme

$$p : G \times X \to X \times X$$

défini par le couple (p_1 , p_2), la condition que G opère librement signifie que p est un monomorphisme.

Bien entendu, même lorsque G n'opère pas librement sur X, on désire avoir des critères d'existence d'un quotient de X par G, i. e. du conoyau du couple (p_1 , p_2) précédent.

Le conoyau en question sera souvent noté X/G, ou de préférence $G\backslash X$ si G opère à gauche (la notation précédente étant réservée au cas où G opère à droite). On notera que même lorsque "l'image" de $G \times X$ par p existe (cette image étant définie par exemple comme le plus petit sous-objet de $X \times X$ par lequel on peut factoriser p), soit R, cette dernière n'est pas le plus souvent une relation d'équivalence dans X. Si on essaye alors de passer directement au quotient par R (ou plus précisément, par le couple des morphismes de R dans X induits par les deux projections pr_i) on perd sans espoir les caractères particuliers du couple de départ (p_1 , p_2). Il importe donc de trouver une généralisation de la notion de relation d'équivalence, s'appliquant directement au couple défini par un $\underset{\sim}{C}$-groupe d'opérateurs.

4. Pré-relations d'équivalence.

Rappelons qu'on appelle groupoïde une catégorie où tous les morphismes sont des isomorphismes. D'autre part, une catégorie doit être définie comme formée de deux ensembles de base (X , R), l'ensemble des objets et l'ensemble des flèches, munis des structures suivantes :

(i) Un couple d'applications

$$p_1 \ , \ p_2 : R \rightrightarrows X$$

appelées <u>application-source</u> et <u>application-but</u>,

(ii) Une application

$$\pi : (R \ , \ p_2) \times_X (R \ , \ p_1) \rightarrow R$$

appelée <u>application-composition</u>.

Ces données doivent satisfaire à des axiomes bien connus, que nous ne répéterons pas ici, et qui pourraient s'expliciter par la commutativité de certains diagrammes, et l'existence d'une application $D : X \rightarrow R$ (nécessairement unique) rend commutatifs deux autres diagrammes. D correspond au passage d'un objet à la flèche identique correspondante, et satisfait à

$$p_1 D = p_2 D = id_X \quad .$$

Dire que la catégorie est un groupoïde signifie alors qu'il existe une application

$$s : R \rightarrow R$$

(nécessairement unique), appelée la <u>symétrie</u> de R, transformant chaque flèche en une flèche inverse, ce qui pourrait s'expliciter par la commutativité de quatre autres diagrammes, formés au moyen de s, Δ et des données précédentes, et dont les deux premiers s'écrivent :

$$p_1 s = p_2 \ , \ p_2 s = p_1 \quad .$$

Ces points étant rappelés, les définitions générales dans ([2], A, § 1) montrent en particulier ce qu'il faut entendre par une structure de <u>$\underset{\sim}{C}$-catégorie</u>, resp. de <u>$\underset{\sim}{C}$-groupoïde</u>, sur un couple d'objets X, R d'une catégorie quelconque $\underset{\sim}{C}$: c'est, par définition, la donnée, pour tout objet T de $\underset{\sim}{C}$, d'une structure de catégorie resp. de groupoïde au sens ensembliste, dont l'ensemble des objets soit $X(T)$, et l'ensemble des flèches $R(T)$, ces structures "variant fonctoriellement" avec T variable. Cela implique donc la définition de deux morphismes

$$p_1 \ , \ p_2 : R \rightrightarrows X$$

appelés <u>morphisme-source</u> et <u>morphisme-but</u>, et lorsque le produit fibré voulu existe d'un morphisme

$$\pi : (R , p_2) \times_X (R , p_1) \rightarrow R$$

appelé morphisme composition , ces trois données suffisant alors à déterminer la structure de catégorie sur X , R , l'axiome à mettre sur ces données étant le suivant : pour tout T , les trois données correspondantes pour $X(T)$, $R(T)$ définissent sur ce couple d'ensembles une structure de catégorie, (resp. de groupoïde). Le cas échéant, cela peut s'exprimer par la commutativité de certains diagrammes, impliquant un morphisme bien déterminé

$$D : X \rightarrow R$$

et dans le cas des groupoïdes, un morphisme bien déterminé

$$s : R \rightarrow R ,$$

diagrammes qui s'explicitent comme dans le cas "ensembliste". Cette interprétation fastidieuse des axiomes est heureusement inutile pour la pratique, le seul intérêt théorique de la possibilité d'exprimer les données et axiomes à partir de morphismes et égalités de morphismes entre certains produits fibrés étant le suivant : si on a un foncteur $F : \underset{\sim}{C} \rightarrow \underset{\sim}{C}'$ exact à gauche (i. e. commutant aux produits finis et aux produits fibrés), il transforme une $\underset{\sim}{C}$-catégorie (resp. un $\underset{\sim}{C}$-groupoïde) en une $\underset{\sim}{C}'$-catégorie (resp. en un $\underset{\sim}{C}'$-groupoïde) (sous réserve de l'existence des produits finis et produits fibrés dans $\underset{\sim}{C}$).

Il est important en pratique de savoir interpréter les morphismes p_1 , p_2 , π , D , s comme des opérations simpliciales dans un objet semi-simplicial ou simplicial convenable de $\underset{\sim}{C}$, du moins lorsque dans $\underset{\sim}{C}$ les produits fibrés existent. Pour fixer la terminologie, introduisons la catégorie $\underset{\sim}{S}$ des simplexes-types comme la catégorie dont les objets sont les ensembles finis de la forme

$$\Delta_n = [0 , n] \qquad \text{où} \quad n \geq 0$$

(intervalle des entiers de 0 à n), et dont les morphismes ou flèches sont les applications quelconques entre ces ensembles finis. On notera que la catégorie $\underset{\sim}{S}$ est équivalente à la catégorie des ensembles finis non vides, où on prend comme morphismes les applications entre ensembles finis. Dans $\underset{\sim}{S}$, la somme d'une famille finie non vide d'objets existe évidemment, ainsi que la somme amalgamée de deux objets sous un troisième (opération duale du produit fibré). On désigne par $\underset{\sim}{S}'$ la sous-catégorie de $\underset{\sim}{S}$ ayant mêmes objets, mais où les morphismes sont les applications croissantes entre les Δ_n . Cette catégorie est équivalente à la catégorie des ensembles finis totalement ordonnés non vides. Dans cette catégorie la somme de deux objets n'existe jamais, et la somme amalgamée de deux objets A, B sous un troisième C n'existe pas en général (prendre par exemple $C = \Delta_o$, $A = B = \Delta_1$, les deux applications structurales $u : C \to A$ et $v : C \to B$ égales). Elle existe cependant dans certains cas, par exemple

$$C = \Delta_o \ , \qquad A = \Delta_m \ , \qquad B = \Delta_n \ , \qquad u(0) = m \ , \qquad v(0) = 0$$

et dans ce cas, on a

$$\Delta_m \amalg_{\Delta_o} \Delta_n = \Delta_{m+n} \quad .$$

Un objet simplicial (resp. un objet semi-simplicial) dans une catégorie $\underset{\sim}{C}$ est par définition un foncteur contravariant K de $\underset{\sim}{S}$ (resp. de $\underset{\sim}{S}'$) dans $\underset{\sim}{C}$. Un objet simplicial définit donc un objet semi-simplicial par restriction, mais la première notion diffère de la seconde essentiellement par la présence d'opérations de symétrie dans les $K_n = K(\Delta_n)$, qui correspondent aux transformés par le foncteur K des éléments du groupe symétrique à $n+1$ lettres (considéré comme le groupe des automorphismes de Δ_n dans $\underset{\sim}{S}$).

Ceci dit, pour tout n, soit Δ'_n (resp. Δ''_n) la catégorie finie, dont l'ensemble des objets est Δ_n, définie par la relation d'ordre chaotique (resp. d'ordre total naturel) sur Δ_n (l'ensemble des flèches étant le graphe de la dite relation d'ordre). Il est évident que Δ'_n (resp. Δ''_n) dépend fonctoriellement de l'objet Δ_n de $\underset{\sim}{S}$ (resp. $\underset{\sim}{S}'$). Si alors Z est une catégorie, $\mathrm{Hom}(\Delta'_n, Z)$ (resp. $\mathrm{Hom}(\Delta''_n, Z)$) est, pour Δ_n variable, un foncteur de la catégorie $\underset{\sim}{S}$, (resp. $\underset{\sim}{S}'$), dans la catégorie des ensembles, i. e. un ensemble simplicial (resp. semi-simplicial), dit associé à la catégorie Z : soient Z' et Z''. On a d'ailleurs un homomorphisme naturel évident de l'ensemble semi-simplicial associé à Z' dans Z'', et ce dernier est un isomorphisme si et seulement si Z est un groupoïde. Ceci posé :

PROPOSITION 4.1. - Le foncteur $Z \rightsquigarrow Z''$ de la catégorie des catégories dans la catégorie des ensembles semi-simpliciaux est pleinement fidèle, et définit une équivalence de la catégorie des catégories avec la catégorie des ensembles semi-simpliciaux, i. e. des foncteurs contravariants K de $\underset{\sim}{S}'$ dans (Ens), qui transforment les sommes amalgamées $A \amalg_C B$ du type précisé plus haut, en produits fibrés d'ensembles. De même, le foncteur $Z \rightsquigarrow Z'$ de la catégorie des groupoïdes dans la catégorie des ensembles simpliciaux est pleinement fidèle, et définit une équivalence de la catégorie des groupoïdes avec la catégorie des ensembles simpliciaux, i. e. des foncteurs contravariants K de $\underset{\sim}{S}$ dans (Ens), qui transforment des sommes amalgamées en produits fibrés.

On peut donc considérer les catégories comme des ensembles semi-simpliciaux particuliers, et les groupoïdes comme des ensembles simpliciaux particuliers, à condition bien entendu de raisonner "à un isomorphisme près" comme il est de rigueur quand on interprète certaines structures en termes d'autres. Le procédé habituel de réduction au cas ensembliste implique alors :

COROLLAIRE 4.2. - L'énoncé précédent reste valable quand on remplace les catégories, groupoïdes, ensembles simpliciaux, par des $\underset{\sim}{C}$-catégories, $\underset{\sim}{C}$-groupoïdes, $\underset{\sim}{C}$-objets simpliciaux, pourvu que dans $\underset{\sim}{C}$ les produits fibrés existent.

L'objet semi-simplicial K dans $\underset{\sim}{C}$ associé à une catégorie $(X , R , \ldots)$ dans $\underset{\sim}{C}$ peut s'expliciter, en interprétant la composante $K_n = K(\Delta_n)$ de K comme étant la puissance fibrée $(n + 1)$-ième de (R , p_1) sur X, ou mieux, par la formule de récurrence,

$$K_o = R \ , \qquad K_n = (K_{n-1} \ , p_n^{(n-1)}) \times_X (R \ , p_1)$$

où les $p_i^{(n-1)}$ $(0 \leq i \leq n - 1)$ sont les projections naturelles de K_{n-1} dans X (qui se définissent également par récurrence). De cette façon, p_1 , p_2 , π , D , s s'interprètent comme les opérations simpliciales qui correspondent respectivement aux morphismes dans $\underset{\sim}{S}$: face 0 de Δ_1 , face 1 de Δ_1 , face $(0 , 2)$ de Δ_2 , dégénérescence $\Delta_1 \to \Delta_o$, symétrie de Δ_1 . Toutes les autres opérations semi-simpliciales (resp. simpliciales) se déduisent formellement des quatre (resp. cinq) précédentes par composition et produits fibrés.

On appelle maintenant pré-relation d'équivalence dans un objet X d'une catégorie, la donnée d'un groupoïde dont l'objet des objets (si on peut dire) est X . Une telle donnée comporte donc entre autres un objet R et deux morphismes

$$p_1 \ , p_2 : R \rightrightarrows X \quad .$$

Mais on notera que ces seules données ne déterminent pas la structure envisagée, contrairement à ce qui a lieu pour les couples d'équivalence. Dans cet exposé, nous nous intéressons à cette notion dans le but d'obtenir des critères de possibilité de passage au quotient, i. e. de formation du conoyau du couple (p_1 , p_2). L'énoncé du problème ne fait donc pas appel aux données supplémentaires inhérentes à un groupoïde. Dans la démonstration des résultats qui vont suivre, on se sert cependant de ces données supplémentaires, et en particulier des opérations simpliciales (y inclus des opérations de symétrie) jusqu'en dimension 3 (faisant intervenir la puissance fibrée quadruple de R sur X).

Une relation d'équivalence dans un objet X de $\underset{\sim}{C}$ définit une pré-relation d'équivalence : il suffit de le voir dans le cas ensembliste, et on associe alors à une relation d'équivalence, dans un ensemble X , le groupoïde dont l'ensemble d'objets est X , et l'ensemble des flèches est l'ensemble graphe de la relation d'équivalence.

Un $\underset{\sim}{C}$-monoïde G opérant sur un objet X de $\underset{\sim}{C}$ définit une $\underset{\sim}{C}$-catégorie dont les objets de base sont $R = G \times X$ et X (sous réserve que $G \times X$ existe), et qui est un $\underset{\sim}{C}$-groupoïde si et seulement si G est un groupe. Il suffit encore d'en faire la vérification dans le cas ensembliste. On définit alors la composition des flèches (g , a) et $(g' , g.a)$ comme étant

$$(g' , g.a)(g , a) = (g' g , a)$$

i. e. si $a , b \in X$; alors $\mathrm{Hom}(a , b)$ est par définition le transporteur de a dans b , et les morphismes se composent grâce à la composition des éléments de G .

REMARQUE. - On peut éviter les difficultés logiques que soulève un énoncé tel que (4.1) en y sous-entendant que tous les objets envisagés se trouvent dans un "Univers" fixé, (qui lui-même est un ensemble).

5. Quotient par une relation d'équivalence finie et plate.

THÉORÈME 5.1. - Soient $X = \mathrm{Spec}(B)$ un schéma affine, $\mathcal{R}$ une pré-relation d'équivalence dans X , dont la composante R_1 est affine, soit $R_1 = \mathrm{Spec}(C)$. On suppose que la première projection $p_1 : R_1 \to X$ est un morphisme fini et localement libre, en d'autres termes que l'homomorphisme d'anneaux correspondant $p_1^! : B \to C$ fait de C un B-module projectif de type fini. Soit A le sous-anneau de B noyau du couple d'homomorphismes $p_1^! , p_2^! : B \rightrightarrows C$ (= ensemble des éléments b tels que $p_1^!(b) = p_2^!(b)$). Soit $Y = \mathrm{Spec}(A)$, et $f : X \to Y$ le morphisme défini par l'immersion de A dans B . Sous ces conditions :

(i) B est entier sur A , i. e. f est un morphisme entier.

(ii) Le morphisme f est surjectif, ses fibres sont les classes d'équivalence ensemblistes $p_2(p_1^{-1}(x))$ dans X modulo $\mathcal{R}$, et la topologie de Y est quotient de celle de X.

(iii) Y est le quotient de X par $\mathcal{R}$ dans la catégorie des préschémas.

(iv) Si $\mathcal{R}$ provient d'une relation d'équivalence, alors le morphisme $f : X \to Y$ est fini localement libre (i. e. B est un A-module projectif de type fini), et la relation d'équivalence est effective, i. e. $R_1 \to X \times_Y X$ est un isomorphisme.

Ce théorème généralise le théorème bien connu relatif au cas d'un groupe fini G opérant par automorphismes sur l'anneau B, et à l'anneau A des invariants, et la démonstration est analogue à la démonstration connue. On peut préciser (iii) ainsi :

COROLLAIRE 5.2. - Le morphisme canonique $R_1 \to X \times_Y X$ est surjectif.

Soit toujours $\mathcal{R}$ une pré-relation d'équivalence "finie et localement libre" dans X, mais X étant un préschéma quelconque. Supposons qu'on puisse trouver un préschéma Y et un morphisme $f : X \to Y$ tel que $fp_1 = fp_2$, et tel en plus que la suite d'homomorphismes de faisceaux d'anneaux sur Y :

$$\mathcal{O}_Y \to f_*(\mathcal{O}_X) \rightrightarrows g_*(\mathcal{O}_R)$$

soit exacte (où $g = fp_i$). Il résulte alors du théorème qu'on a des conclusions (i) à (iv) analogues à celles du théorème, en particulier, par (iii), Y est le quotient de X par $\mathcal{R}$, et par suite déterminé à un isomorphisme unique près. On dira sous ces conditions que la pré-relation d'équivalence $\mathcal{R}$ dans X est "admissible". Avec cette définition :

THÉORÈME 5.3. - Soient X un préschéma, $\mathcal{R}$ une pré-relation d'équivalence dans X, telle que $p_1 : R_1 \to X$ soit un morphisme fini et localement libre. Pour que $\mathcal{R}$ soit admissible, il faut et il suffit que toute classe d'équivalence ensembliste $p_2(p_1^{-1}(x))$ dans X modulo $\mathcal{R}$ soit contenue dans un ouvert affine (condition toujours vérifiée si toute partie finie de X est contenue dans un ouvert affine, par exemple si X est quasi-projectif sur un schéma affine).

On montre en effet sans difficulté que toute classe d'équivalence mod $\mathcal{R}$ dans X est alors contenue dans un ouvert affine stable par $\mathcal{R}$, et on construit le quotient Y par recollement des morceaux obtenus à l'aide du théorème 5.1.

COROLLAIRE 5.4. - Supposons cette condition réalisée et que de plus $\mathcal{R}$ provient d'une relation d'équivalence. Alors cette dernière est effective, i. e. $R_1 \to X \times_Y X$ est un isomorphisme, et $f : X \to Y$ est un morphisme fini localement libre.

On en conclut aussitôt, par "descente" :

COROLLAIRE 5.5. - Sous les conditions de (5.4), pour que X soit partout de rang n au-dessus de Y, il faut et il suffit que (R_1 , p_1) soit partout de rang n au-dessus de X. Si X, R_1 sont des Z-préschémas et p_1, p_2 des Z-morphismes, donc Y un Z-préschéma, alors X est plat sur Z si et seulement si Y l'est.

En résumé :

SCHOLIE. - La donnée d'un morphisme fini, localement libre et surjectif $f : X \to Y$ de préschémas, est équivalente à la donnée d'un préschéma X muni d'une relation d'équivalence R telle que $p_1 : R \to X$ soit fini et localement libre, et que toute classe $p_2(p_1^{-1}(x))$ soit contenue dans un ouvert affine.

REMARQUES 5.6.

1° On n'a pas eu à faire d'hypothèse noethérienne.

2° Cette notion de passage au quotient comprend comme cas particulier la "descente inséparable" de CARTIER, qui correspond à la détermination des morphismes finis localement libres $f : X \to Y$ tels que $f_*(\mathcal{O}_X)$ admette une p-base par rapport à $\mathcal{O}_Y$ (X étant un préschéma donné dont le faisceau $\mathcal{O}_X$ est annulé par le nombre premier $p > 0$). On notera que le résultat s'exprime aisément sans hypothèse de régularité sur les anneaux locaux et sans supposer que X est un schéma algébrique sur un corps. La théorie de JACOBSON-BOURBAKI est obtenue en prenant pour X le spectre d'un corps de caractéristique p.

3° GABRIEL avait auparavant obtenu un cas particulier du théorème (5.3) dans la théorie du passage au quotient pour les groupes commutatifs finis au-dessus d'un corps k. [Comparer (7.4)].

6. Quotient par une relation d'équivalence propre et plate.

THÉORÈME 6.1. - Soient S un préschéma localement noethérien, X un S-schéma quasi-projectif, $\mathcal{R}$ une pré-relation d'équivalence dans X, telle que :

(a) $p_1 : R_1 \to X$ est propre et plat ; (b) $R_1 \to X \times_S X$ est un morphisme fini, ou ce qui revient au même en vertu de (a), à fibres finies (condition automatiquement vérifiée si $\mathcal{R}$ provient d'une relation d'équivalence). Sous ces conditions :

(i) $X/\mathcal{R} = Y$ existe, et (si S est noethérien) est quasi-projectif sur S.

(ii) Le morphisme canonique $f : X \to Y$ est surjectif, propre, ouvert, ses fibres sont les classes d'équivalence $p_2(p_1^{-1}(x))$ dans X mod $\mathcal{R}$, donc Y s'identifie à l'espace topologique quotient de X par la relation d'équivalence ensembliste définie par $\mathcal{R}$. Enfin, $R_1 \to X \times_Y X$ est surjectif.

(iii) Si $\mathcal{R}$ provient d'une relation d'équivalence, cette dernière est effective, i. e. $R_1 \to X \times_Y X$ est un isomorphisme, et de plus $f : X \to Y$ est plat (donc fidèlement plat).

Pour la démonstration, on se ramène à (5.1) grâce à des quasi-sections convenables de X pour $\mathcal{R}$, la démonstration étant analogue à la construction des groupes algébriques quotients dans le Séminaire Chevalley.

En résumé :

SCHOLIE. - Soit X quasi-projectif sur S localement noethérien. La donnée d'un morphisme propre, fidèlement plat et surjectif $f : X \to Y$ de X dans un S-préschéma Y, est équivalente à la donnée d'une relation d'équivalence R sur X, telle que $p_1 : R \to X$ soit propre et plat.

La même méthode donne le résultat suivant :

THÉORÈME 6.2. - Soient S un préschéma noethérien, X un préschéma de type fini sur S, $\mathcal{R}$ une pré-relation d'équivalence dans le S-préschéma X, on suppose que : (a) $p_1 : R_1 \to X$ est plat et de type fini ; (b) Le morphisme $R_1 \to X \times_S X$ est quasi-fini, (i. e. à fibres finies). Alors il existe un ouvert U dense dans X saturé pour $\mathcal{R}$, tel que :

(i) Si $\mathcal{R}_U$ est la pré-relation d'équivalence induite par $\mathcal{R}$ dans U, alors $U/\mathcal{R}_U$ existe, et est de type fini sur S.

(ii) Le morphisme canonique $U \to U/\mathcal{R}_U$ est surjectif et ouvert, ses fibres sont les classes d'équivalence ensembliste pour $\mathcal{R}_U$, (donc $U/\mathcal{R}_U$ est un espace topologique quotient de U par la relation d'équivalence ensembliste définie par $\mathcal{R}_U$), enfin le morphisme $(\mathcal{R}_U)_1 \to U \times_{U/\mathcal{R}_U} U$ est surjectif.

(iii) Si $\mathcal{R}$ provient d'une relation d'équivalence, on peut supposer $U \to U/\mathcal{R}_U$ fidèlement plat et $\mathcal{R}_U$ effectif.

C'est là un résultat de nature essentiellement "birationnelle".

REMARQUES 6.3.

1° J'ignore si dans (6.1) et (6.2) l'hypothèse (b) est inutile. Elle nous oblige pratiquement dans le passage au quotient par des groupes de nous borner au cas où les stabilisateurs sont tous des groupes finis.

2° On peut se demander s'il n'y a pas des résultats analogues à (6.1) et (6.2) sans hypothèse de platitude. Je n'ai aucun contre-exemple dans cette direction. Par contre, même en gardant l'hypothèse de platitude, et en se bornant à des relations d'équivalence telles que $p_1 : R \to X$ soit plat et quasi-fini (mais non fini), X étant affine, il peut arriver que R ne soit pas effective : prendre les relations d'équivalence induites sur des ouverts affines recouvrant la variété de Nagata (où un groupe à deux éléments opère de façon "non admissible").

7. Applications.

Comme nous l'avons dit dans l'introduction, l'application la plus importante de (6.1) est la construction de schémas de Picard, ainsi que de solutions pour divers autres problèmes de "modules", sur lesquels nous reviendrons ultérieurement.

On obtient une démonstration simple du résultat suivant de SHIMURA :

PROPOSITION 7.1. - Soit A un schéma abélien défini sur un anneau de valuation discrète V de corps des fractions K. Alors tout schéma abélien B' sur K isogène à un quotient de $A \otimes_V K$ "se réduit bien pour V" i. e. est isomorphe à un $B \otimes_V A$, où B est un schéma abélien sur V (essentiellement unique, rappelons-le).

On peut supposer que B' est le quotient de A_K par un sous-schéma en groupes C'. (N. B. : C' ne sera en général pas "réduit", i. e. ses anneaux locaux auront des éléments nilpotents). Considérons le sous-schéma fermé C de A "adhérence" de C', i. e. le plus petit sous-schéma fermé de A tel que C_K majore C'. On aura $C_K = C'$, et du fait que V est un anneau de valuation discrète, on tire facilement que C est un sous-schéma en groupes de A sur V. Comme A est propre sur $\mathrm{Spec}(V) = S$, il en est de même de C, d'autre part A est même projectif sur S. On peut alors appliquer (6.1) pour construire $A/C = B$, c'est le B cherché.

Enfin, des raisonnements essentiellement connus permettent de tirer de (6.2) le résultat suivant :

THÉORÈME 7.2. - Soient S le spectre d'un anneau artinien, F et G des schémas en groupes de type fini sur S, $u : F \to G$ un homomorphisme de schémas en groupes sur S. On suppose

(i) F est plat sur S ;

(ii) le noyau de u est fini.

Sous ces conditions, le schéma quotient G/F existe, le morphisme canonique $G \to G/F$ est surjectif et ouvert, ses fibres sont les classes d'équivalence ensemblistes définies par les opérations à droite de F sur G. Enfin, si u est un monomorphisme, alors le morphisme $G \to G/F$ est plat et le morphisme $G \times F \to G \times_{(G/F)} G$ est un isomorphisme, en d'autres termes G est un espace principal homogène sur G/F, de groupe structural (opérant à droite) F, ou plutôt $F \times_S (G/F)$ considéré comme schéma en groupes sur G/F (cf. [1], B, § 6).

COROLLAIRE 7.3. - Sous ces conditions, pour que G soit plat sur S, il faut et il suffit que G/F le soit. Si cette condition est vérifiée, alors le passage au quotient par F commute à toute extension de la base S, et si F est un sous-groupe invariant de G, G/F peut être muni d'une structure de <u>groupe quotient</u> de G par F.

La situation est particulièrement simple si S est le spectre d'un corps, car alors tout S-préschéma est automatiquement plat sur S. On trouve :

COROLLAIRE 7.4. - Soient F, G des schémas en groupes de type fini sur un corps k, et soit $u : F \to G$ un homomorphisme de k-groupes. Alors u se factorise en $F \to F' \to G$, où $F \to F'$ est un homomorphisme de passage au quotient par le sous-groupe fermé $\operatorname{Ker} u$ de F, et où $F' \to G$ est un homomorphisme de groupes qui est une immersion fermée. Le quotient $G/F = G/F'$ existe. Le formalisme habituel (genre théorèmes de Noether) est valable parmi les groupes algébriques sur k.

Ce résultat permet de traiter de manière uniforme le passage au quotient dans les groupes algébriques au sens classique (i. e. qui sont irréductibles sur k et simples sur k), et le passage au quotient par des sous-groupes "infinitésimaux" considéré par CARTIER. Il y a avantage à considérer les "hyperalgèbres" introduites par CARTIER, à la suite des travaux de DIEUDONNÉ sur les groupes formels, comme des groupes dans la catégorie des schémas formels au-dessus de k , et le cas échéant (s'ils correspondent à des hyperalgèbres de rang fini sur k) comme des groupes algébriques finis sur k .

8. Une conjecture.

Elle répond au besoin de savoir passer au quotient par le groupe projectif opérant sur certains sous-schémas des "schémas de Hilbert" (ces derniers remplaçant, en théorie des schémas, les variétés de Chow).

Soient S un préschéma, et n un entier. A tout préschéma S' sur S , faisons correspondre le groupe $Gl(n , \Gamma(S' , \mathcal{O}_{S'}))$ des matrices inversibles à n lignes et n colonnes à valeurs dans l'anneau des sections de $\mathcal{O}_{S'}$. On obtient ainsi un foncteur contravariant en S' , dont on montre aisément qu'il est représentable, il correspond donc à un schéma en groupes sur S , d'ailleurs affine sur S , noté $G\ell(n)_S$. Sa formation est compatible avec le changement de base, de sorte qu'en réalité tout provient d'un schéma en groupes sur $\underset{\sim}{Z}$, noté $G\ell(n)$. Le groupe $Gl(1)$, appelé groupe multiplicatif et souvent noté G_m , correspond au foncteur $S \rightsquigarrow \Gamma(S , \mathcal{O}_S)^*$, groupe des "unités" sur S . On a un homomorphisme évident $Gl(1) \rightarrow Gl(n)$, et on construit facilement le groupe quotient, noté $GP(n - 1)$ et appelé le groupe projectif de degré $n - 1$ sur $\underset{\sim}{Z}$. Il représente le foncteur qui, à S , associe le groupe des sections du faisceau $\underset{\sim}{Gl}(n)_S/\underset{\sim}{Gl}(1)_S$ où $\underset{\sim}{Gl}(n)_S$ désigne le faisceau des germes de sections de $Gl(n)_S$ sur S . (On fera attention que les sections de $GP(n - 1)_S$ sur S ne proviennent pas en général de sections de $Gl(n)_S$ sur S !). Notons que l'on peut prouver que $GP(n - 1)$ représente également le foncteur $S \rightsquigarrow \mathrm{Aut}_S(P_S^{n-1})$, (où P_S^{n-1} est le schéma projectif-type de dimension relative $n - 1$ sur S), du moins pour S noethérien. C'est de cette façon qu'il s'introduit en théorie des modules.

Soit S un schéma noethérien, qu'on peut si on veut supposer affine, et soit X un S-préschéma quasi-projectif, muni d'un faisceau inversible $\mathcal{L}$ très ample relativement à S . On suppose que le groupe $G = GP(n)_S$ opère sur X et en même temps sur $\mathcal{L}$ (de façon compatible avec ses opérations sur X), et qu'il opère librement sur S .

CONJECTURE 8.1. - Sous les conditions précédentes :

1° La relation d'équivalence définie par G est effective, le quotient $Y = X/G$ est de type fini sur S et le morphisme canonique $f : X \to Y$ est plat et surjectif (donc X devient un fibré principal homogène sur Y, de groupe $G \times_S Y = GP(n)_Y$).

2° Soit $\mathcal{L}'$ le faisceau inversible sur Y déduit de $\mathcal{L}$ par "descente fidèlement plate" par f (cf. [1], B, § th. 1). Alors $\mathcal{L}'$ est "préample" sur Y par rapport à S, i. e. il existe un entier m et un morphisme quasi-fini de Y dans un schéma projectif-type convenable P_S^N, tels que $(\mathcal{L}')^{\otimes m}$ soit isomorphe à l'image inverse de $\mathcal{O}_{P_S^N}(1)$.

On notera que même si X est séparé sur S, il pourra arriver que Y ne soit pas séparé sur S (situation qui se rencontre dans des situations de "problèmes de modules" pas du tout pathologiques). Si 1° est vérifié, alors Y est séparé si et seulement si la relation d'équivalence définie par G a un graphe fermé, i. e. si $G \times X \to X \times X$ a une image fermée (c'est alors une immersion fermée). Si Y est séparé, alors $\mathcal{L}'$ est préample sur Y par rapport à S si et seulement si il est ample, i. e. si une puissance tensorielle convenable définit une immersion projective. Dans les problèmes de modules mentionnés dans l'introduction, on peut montrer que la relation d'équivalence à laquelle on parvient à bien un graphe fermé.

REMARQUES 8.1. - Nous avons supposé $G = GP(n)_S$ pour fixer les idées et parce que c'est le cas le plus important en pratique, à l'heure actuelle. L'hypothèse raisonnable à faire sur G semblerait plutôt que G soit une des "formes" sur S d'un des groupes de Tohokû (dont la construction sur les entiers a été faite également par CHEVALLEY). Le seul fait positif qui me soit connu dans la direction de la conjecture précédente est le suivant : Soit X un schéma affine sur un corps k de caractéristique 0, où le groupe $Gl(n)_k$ ou $GP(n-1)_k$ opère librement. Alors la relation d'équivalence définie par G est effective, le quotient X/G est également affine, et le morphisme $X \to X/G$ est plat et surjectif. La démonstration utilise le fait suivant (qui pour l'instant n'est démontré qu'en caractéristique 0) : lorsque l'on fait opérer G sur l'anneau affine A de G, considéré comme espace vectoriel sur k, la représentation triviale de G n'intervient qu'une fois (dans une suite de composition d'un sous-espace vectoriel de dimension finie sur k stable sous G). Il semble possible qu'une utilisation systématique de la théorie des représentations linéaires de G finira par donner une démonstration de la conjecture, du moins lorsque l'on est sur un corps de base. Lorsque l'on n'est plus sur un corps de base, le conférencier ignore tout.

BIBLIOGRAPHIE

[1] GROTHENDIECK (Alexander). - Techniques de descente et théorèmes d'existence en géométrie algébrique, I : Généralités, Séminaire Bourbaki, 1959/60, n° 190, 29 p.

[2] GROTHENDIECK (Alexander). - Techniques de descente et théorèmes d'existence en géométrie algébrique, II : Le théorème d'existence en théorie formelle des modules, Séminaire Bourbaki, 1959/60, n° 195, 22 p.

[3] GROTHENDIECK (A.) et DIEUDONNÉ (J.). - Éléments de géométrie algébrique, I : Le langage des schémas. - Paris, Presses universitaires de France, 1960 (Institut des hautes Études scientifiques, Publications mathématiques, 4).

TECHNIQUES DE CONSTRUCTION ET THÉORÈMES D'EXISTENCE EN GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE
IV : LES SCHÉMAS DE HILBERT

par Alexander GROTHENDIECK

INTRODUCTION. - Les techniques exposées dans [2], I et II, étaient pour l'essentiel indépendantes de toute hypothèse projective sur les schémas envisagés. Malheureusement, elles ne permettent pas à l'heure actuelle de résoudre les problèmes d'existence posés dans l'exposé II de [2]. Dans le présent exposé et le suivant, nous allons résoudre ces problèmes moyennant des hypothèses projectives. Les techniques employées sont typiquement projectives, et ne font pratiquement pas usage des résultats de I et II de [2]. Ici, nous allons construire les "schémas de Hilbert" destinés à remplacer l'utilisation des coordonnées de Chow, comme il a été dit dans [2], II, n° 2. Dans l'exposé suivant, la théorie de passage au quotient dans les schémas développée dans III, jointe à la théorie des schémas de Hilbert, nous permettra par exemple de construire les schémas de Picard (définis dans [2], II, n° 3) sous des conditions assez générales.

En résumé, on peut dire qu'on dispose maintenant d'une technique de constructions projectives à peu près satisfaisante, sauf qu'il manque encore (*) un théorème de passage au quotient par des groupes tels que le groupe projectif, opérant "sans points fixes" (cf. [2], III, n° 8). La situation semble même un peu meilleure en géométrie analytique (lorsqu'on s'y borne à l'étude des espaces analytiques "projectifs" sur un espace analytique donné) , car pour les espaces analytiques la difficulté de passage au quotient par un groupe opérant joliment disparait. Par ailleurs, en géométrie algébrique comme en géométrie analytique, il resterait à mettre au point une technique de construction valable sans hypothèses projectives.

1. Familles limitées de faisceaux : propriétés de permanence.

Soient k un corps, et X un k-préschéma, de type fini pour simplifier. Pour toute extension K/k , on en déduit donc un K-préschéma $X_K = X \otimes_k K$. Si $\mathcal{F}$ est un faisceau cohérent sur X_K , et si K' est une extension de K , alors $\mathcal{F} \otimes_K K' = \mathcal{F}_{K'}$ est un faisceau quasi-cohérent sur $X_K \otimes_K K' = X_{K'}$. Ceci dit, si K et K' sont deux extensions quelconques de k , $\mathcal{F}$ un faisceau quasi-cohérent sur X_K et $\mathcal{F}'$

(*) Voir l'additif à la fin de l'exposé.

un faisceau quasi-cohérent sur $X_{K'}$, on dira que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ sont <u>équivalents</u> s'il existe des K-homomorphismes de K , K' dans une même extension K" de k , tels que $\mathcal{F}_{K''}$ et $\mathcal{F}'_{K'}$ soient isomorphes sur $X_{K''}$. C'est là une relation d'équivalence, et on s'intéressera à des classes d'équivalence de faisceaux pour cette relation, et des ensembles de classes d'équivalence. Notons que ci X_o est de type fini sur k , alors toute classe de faisceaux cohérents peut être définie par un faisceau cohérent sur un X_K , où K est une extension <u>de type fini</u> de k . On peut alors, dans la définition des classes de faisceaux cohérents, se borner aux extensions <u>algébriquement closes</u> de k , et on peut aussi se limiter à une extension algébriquement close fixée Ω de k , de degré de transcendance infini, deux faisceaux cohérents $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ sur X_Ω étant équivalents si et seulement s'il existe un K-automorphisme σ de Ω , tel que $\mathcal{F} \otimes_K (\Omega , \sigma)$ soit isomorphe à $\mathcal{F}'$. On constate qu'il y a correspondance biunivoque entre les classes de faisceaux cohérents pour l'une ou l'autre définition.

Soient E , E' deux ensembles de classes de faisceaux cohérents sur X . Considérons les classes de tous les faisceaux de la forme $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}'$, où $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ sont des faisceaux cohérents sur un <u>même</u> X_K , la classe de $\mathcal{F}$ étant dans E et celle de $\mathcal{F}'$ dans E' . On trouve ainsi un ensemble de classes de faisceaux cohérents, qu'on notera $E \otimes E'$. On définit de même les $\underline{\mathrm{Tor}}_i$ (E , E') , etc. De façon générale, à toute fonction $\mathcal{U}$, associant à toute suite $\mathcal{F}_1 , \ldots , \mathcal{F}_n$ de n faisceaux cohérents sur un même X_K un ensemble $\mathcal{U}(\mathcal{F}_1 , \ldots , \mathcal{F}_n)$ de faisceaux cohérents sur X_K , et ayant une propriété évidente de compatibilité avec les isomorphismes de faisceaux et les images inverses par changement de base, on associe une fonction, notée par le même symbôle $\mathcal{U}$, associant à toute suite de n ensemble $E_1 , \ldots , E_n$ de classes de faisceaux cohérents, un ensemble $\mathcal{U}(E_1 , \ldots , E_n)$ de classes de faisceaux cohérents.

Notre but dans ce numéro est de donner une définition de certains ensembles de classes de faisceaux, qualifiés de <u>limités</u>, et de montrer que les opérations $\mathcal{U}$ les plus courantes, appliquées à des ensembles limités, donnent encore des ensembles limités.

Soit X un préschéma de type fini sur S <u>noethérien</u>. Pour tout $s \in S$, la fibre X_s est un préschéma de type fini sur k(s) , et nous considérerons des classes de faisceaux cohérents sur X_s , au sens précédent. Cela donne un sens à la locution : classe de faisceaux cohérents sur une fibre de X/S , et les locutions analogues. De même, procédant séparément sur chaque fibre, on peut encore considérer des opérations telles que $E \otimes E'$ etc. faisant correspondre à des systèmes d'ensembles de classes de faisceaux cohérents sur les fibres de X/S , un autre ensemble de classes de faisceaux cohérents sur les fibres de X/S .

DÉFINITION 1.1. - Soit E un ensemble de classes de faisceaux cohérents sur les fibres de X/S . On dit que E est limité, s'il existe un préschéma S' de type fini sur S , et un faisceau cohérent $\mathfrak{F}'$ sur $X' = X \times_S S'$, tel que E soit contenu dans l'ensemble des classes de faisceaux sur les fibres de X/S défini par $\mathfrak{F}'$.

Ce dernier, par définition, fait correspondre à un $s \in S$ les classes des faisceaux $\mathfrak{F}' \otimes_{S'} k(s')$, où s' parcourt les points de S' au-dessus de s (de sorte que $k(s')$ est une extension de $k(s)$, et $X \otimes (X_s)_{k(s')}$ s'identifie à la fibre $X' \otimes_{S'} k(s') = X'_{s'}$ de X' en s'). On peut dire que les familles limitées sont celles qui sont contenues dans une famille algébrique de faisceaux cohérents, paramétrée par un S' de type fini sur S .

Une réunion finie de familles limitées est limitée (prendre le préschéma somme des préschémas de paramètres S_i définissant les familles algébriques majorantes). Un changement de base $T \to S$ transforme une famille limitée relative à X/S en une famille limitée relative à X_T/T , et la réciproque est vraie si $T \to S$ est surjectif (ou plus généralement, si son image contient les s qui interviennent effectivement dans la famille donnée E pour X/S). Cela ramène théoriquement la détermination des familles limitées au cas où S est le spectre d'une algèbre de type fini sur l'anneau des entiers Z .

Si E et E' sont des familles limitées de classes de faisceaux relatives à X/S , alors $E \otimes E'$ est également limité : en effet, si E et E' sont majorés respectivement par les familles algébriques définies par des $T \to S$ et F sur X_T , $T' \to S$ et F' sur $X_{T'}$, on voit que $E \otimes E'$ est majoré par la famille algébrique définie par $T' = T \times_S T' \to S$ et le faisceau F'' sur $X_{T''}$ produit tensoriel des images inverses de $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{F}'$ sur $X_{T''}$. Ce raisonnement n'est correct que parce que le foncteur $\mathfrak{F} \otimes \mathfrak{F}'$ en $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}'$ est exact à droite, donc commute à l'extension de la base (et en particulier au passage aux fibres). Il n'est pas applicable tel quel aux opérations locales telles que $\underline{\mathrm{Tor}}_i (E , E')$, $\underline{\mathrm{Hom}} (E , E')$ $\underline{\mathrm{Ext}}^i (E , E')$. On peut cependant montrer que ces opérations transforment encore ensembles limités en ensembles limités, en procédant comme pour $E \otimes E'$, mais en utilisant en plus des résultats du type suivant (tous contenus dans [3], IV, 6.11) : une famille limitée E est toujours majorée par une famille algébrique définie par un faisceau cohérent $\mathfrak{F}$ sur un X_T (T de type fini sur S) qui est plat relativement à T . (On "coupe au morceaux" l'espace des paramètres initial). De telles propriétés de platitude sur des faisceaux convenables assurent en effet la commutation d'opérations telles que $\underset{\sim}{\mathrm{Tor}}_i(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ au changement de base quelconque. La même méthode s'applique pour des opérations de nature globale : images directes et images directes dérivées de faisceaux cohérents par des morphismes propres, Ext globaux relatifs à des morphismes propres (cf. [5], III, § 6), etc., toutes ces opérations transforment des familles limitées de faisceaux en familles limitées de faisceaux (N. B. - Ici les préschémas sur lesquels on prend les divers faisceaux peuvent changer par les opérations du type envisagé).

Les deux énoncés qui suivent se démontrent essentiellement par la même technique de platitude ; pour la décomposition primaire sur les fibres d'un morphisme de type fini, voir en particulier [5], IV.

PROPOSITION 1.2. - Soient E , E' des ensembles limités de classes de faisceaux sur les fibres de X/S , X étant supposé propre sur S . Alors :

(i) La famille des noyaux, conoyaux, images d'homomorphismes $\mathcal{F} \to \mathcal{F}'$, où la classe de $\mathcal{F}$ est dans E et celle de $\mathcal{F}'$ dans E' , est limitée.

(ii) La famille des faisceaux $\mathcal{F}''$ extensions d'un $\mathcal{F}$ par un $\mathcal{F}'$, où la classe de $\mathcal{F}$ est dans E et celle de $\mathcal{F}'$ dans E' , est limitée.

Moyennant un changement de base convenable, on peut supposer E et E' définis respectivement par un faisceau cohérent $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$ sur un X_T/T , T de type fini sur S . De plus, on peut supposer satisfaites certaines hypothèses de platitude, impliquant que la formation du faisceau $f_T(\underset{\sim}{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_{X_T}}(\mathcal{G}, \mathcal{G}'))$ et $\underset{\sim}{\mathrm{Ext}}^1_{f_T}(\mathcal{G}, \mathcal{G}')$ commute au changement de base pour un morphisme quelconque $T' \to T$. De plus, on peut supposer les faisceaux cohérents précédents sur T localement libres. Soient alors T_0 et T_1 les fibrés vectoriels sur T dont les faisceaux de germes de sections sont respectivement les faisceaux précédents. On définit alors canoniquement un homomorphisme $\mathcal{G}_{T_0} \to \mathcal{G}'_{T_0}$ de faisceaux cohérents sur X_{T_0} , et une extension

$$0 \to \mathcal{G}_{T_1} \to \mathcal{G}'' \to \mathcal{G}'_{T_1} \to 0$$

de faisceaux cohérents sur X_{T_1} , ayant une propriété universelle évidente. Ce deuxième faisceau définit une famille algébrique qui majore la famille envisagée dans (ii). Il en est de même pour les noyau, conoyau et image de l'homomorphisme précédent, dont la considération établit (i) (pourvu qu'on suppose le conoyau plat relativement à T_o, auquel cas on se ramène encore en découpant T_o en morceaux ...).

PROPOSITION 1.3. - Soit E une famille limitée de classe de faisceaux sur les fibres de X/S. Alors les classes des faisceaux structuraux des $(\operatorname{supp} \mathcal{F})_{\text{réd}}$, où $\mathcal{F}$ est un faisceau cohérent sur un X_K, avec K algébriquement clos, dont la classe est dans E, forment une famille limitée.

Ici, $(\operatorname{supp} \mathcal{F})_{\text{réd}}$ désigne le support de $\mathcal{F}$, muni de la structure réduite induite, i. e. son faisceau structural est le quotient de $\mathcal{O}_{X_K}$ par le plus grand faisceau d'idéaux définissant $\operatorname{supp} \mathcal{F}$. On peut prouver le résultat analogue à (1.3) pour les faisceaux déduits canoniquement de $\mathcal{F}$ par la théorie de la décomposition primaire, par exemple les $\mathcal{F}/\mathcal{F}_i$, où les $\mathcal{F}_i$ sont les sous-faisceaux de $\mathcal{F}$, primaires pour les composantes du support de $\mathcal{F}$, minimaux pour cette propriété ; ou les $\mathcal{O}_{X_K}/\underset{\sim}{p}$, où $\underset{\sim}{p}$ est un faisceau d'idéaux premier associé à $\mathcal{F}$, ou les $\mathcal{O}_{X_K}/\underset{\sim}{q}$, où $\underset{\sim}{q}$ est un faisceau d'idéaux primaire associé à une composante du support de $\mathcal{F}$, (le corps de référence étant algébriquement clos).

2. Familles limitées et polynôme de Hilbert.

Dans la suite, nous supposons que X est projectif sur S, muni d'un faisceau très ample, noté $\mathcal{O}_X(1)$. Pour toute extension K d'une extension résiduelle $k(s)$ d'un point s de S, on considère sur X_K le faisceau $\mathcal{O}_{X_K}(1)$ correspondant, qui sera encore très ample.

A tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur X_K, on associe la fonction

$$P_{\mathcal{F}}(n) = \text{caractéristique d'Euler-Poincaré de } F(n) \text{ sur } X_K$$

qui est un polynôme en l'entier n, appelé polynôme de Hilbert de $\mathcal{F}$. Pour les grandes valeurs de n, $P(n)$ n'est autre chose que la dimension de $H^0(X_K, \mathcal{F}(n))$ sur K, puisque les $H^i(X_K, \mathcal{F}(n))$ sont nuls pour $i > 0$ et n grand.

Si maintenant $\mathcal{F}$ est un faisceau cohérent sur X, plat par rapport à S, alors les polynômes de Hilbert des faisceaux $\mathcal{F}_s$ induits sur les fibres X_s relatifs à une même composante connexe de S, sont tous égaux [5], III, § 7. Il en résulte (sans hypothèse de platitude) que l'ensemble des polynômes de Hilbert des faisceaux $\mathcal{F}_s$, $s \in S$, est fini pour tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur X.

Rappelons d'autre part que si $\mathcal{F}$ est un faisceau cohérent sur X, il est isomorphe à un faisceau quotient d'un faisceau $\mathcal{O}_X(-n)^N$, pour n, N assez grands. Donc les faisceau $\mathcal{F}_s$ induits sur les fibres sont également quotients du faisceau $\mathcal{O}(-n)$ sur la fibre.

De ces deux remarques, on déduit la partie "il faut" du théorème suivant :

THÉORÈME 2.1. - Soit X projectif sur S noethérien, $\mathcal{O}_X(1)$ très ample sur X relativement à S. Soit E un ensemble de classes de faisceaux sur les fibres de X/S. Pour que E soit limité, il faut qu'il satisfasse les conditions suivantes :

(a) Il existe un faisceau cohérent $\mathcal{L}$ sur X (qu'on peut supposer de la forme $\mathcal{O}_X(-n)^N$) tel que E soit contenu dans la famille des classes de faisceaux cohérents quotients de faisceaux de la forme $\mathcal{L}_K$.

(b) Les polynômes de Hilbert $P_{\mathcal{F}}$ des faisceaux $\mathcal{F}$ dont la classe est dans E, sont éléments d'un même ensemble fini de polynômes.

Il reste à prouver le "il suffit", qui sera un cas particulier d'un résultat plus précis. Pour tout Module cohérent $\mathcal{F}$ sur un préschéma de type fini sur un corps K, et tout entier r, soit N_r le sous-Module de $\mathcal{F}$ dont les sections sur un ouvert sont les sections de $\mathcal{F}$ sur cet ouvert dont le support est de dimension $< r$. On a donc $N_r = \mathcal{F}$ pour $r > \dim \operatorname{supp} \mathcal{F}$, $N_r = 0$ pour $r \leqslant 0$, et on obtient une filtration croissante finie de $\mathcal{F}$ dont les facteurs N_r/N_{r+1} ont comme cycle premiers associés exactement les cycles premiers associés à $\mathcal{F}$ qui sont de dimension r. On posera

$$\mathcal{F}_{(r)} = \mathcal{F}/N_r \quad ,$$

donc $\mathcal{F}_{(r)}$ a comme cycles premiers associés exactement les cycles premiers associés à $\mathcal{F}$ qui sont de dimension $\geqslant r$, et en particulier, il est égal à $\mathcal{F}$ si et seulement si les cycles premiers associés à $\mathcal{F}$ sont de dimension $\geqslant r$. Ceci posé :

THÉORÈME 2.2. - Sous les conditions de (2.1), soit s un entier, et supposons que E satisfasse les conditions (a), et la forme affaiblie suivante de (b) :

(b_s) Les polynômes de Poincaré $P_{\mathcal{F}}$ des faisceaux $\mathcal{F}$ dont la classe est dans E, ont des coefficients en degrés $\leqslant s-1$ qui restent bornés.

Sous ces conditions, les faisceaux $\mathcal{F}_{(s)}$ (lorsque la classe de $\mathcal{F}$ reste dans E) forment une famille limitée. De plus, les coefficients en degré $s-2$ des $P_{\mathcal{F}}$ restent minorés.

Ainsi :

COROLLAIRE 2.3. - <u>Supposons que les faisceaux</u> $\mathcal{F}$ <u>dont la classe est dans</u> E <u>soient tels que tous les cycles premiers associés soient de dimension</u> d <u>satisfaisant</u> $s \leqslant d \leqslant r$. <u>Alors dans (2.1) (b), on peut se borner aux coefficients des</u> $P_{\mathcal{F}}$ <u>en degrés compris entre</u> $s - 1$ <u>et</u> r.

La fin du numéro est consacré à l'esquisse de la démonstration de (2.2). Les lemmes-clefs sont les deux lemmes suivants, dont le premier est bien connu (et résume le contenu mathématique utile des coordonnées de Chow) :

LEMME 2.4 (CHOW). - <u>Considérons les faisceaux structuraux de sous-schémas</u> Y <u>de fibres</u> X_K (K <u>extensions algébriquement closes de corps résiduels de</u> S) <u>avec</u> Y <u>réduit et toutes ses composantes de même dimension</u> r, ($\mathcal{O}_Y$ <u>étant considéré comme un faisceau quotient de</u> $\mathcal{O}_X$). <u>Si les degrés des</u> Y <u>restent bornés, les</u> Y <u>forment une famille limitée</u>.

Ici, le degré a de Y peut se définir le plus commodément par le coefficient du terme dominant de $P_{\mathcal{O}_Y} = an^r/r! + \dots$.

LEMME 2.5. - <u>Soient</u> $\mathcal{E}$ <u>un faisceau cohérent sur</u> X, E <u>un ensemble de classes de faisceaux quotient</u> $\mathcal{F}$ <u>de faisceaux</u> $\mathcal{E}_K$ (K <u>extension résiduelle de</u> S). <u>On suppose les fibres de</u> X <u>sur</u> S <u>de dimension</u> $\leqslant r$, <u>et on pose</u>

$$P_{\mathcal{F}}(n) = a_{\mathcal{F}}\, n^r/r! + b_{\mathcal{F}}\, n^{r-1}/(r-1)! + \text{termes de degré} < r-1 \quad .$$

<u>Alors le coefficient</u> $a_{\mathcal{F}}$ <u>reste borné, et</u> $b_{\mathcal{F}}$ <u>reste minoré. Si</u> $b_{\mathcal{F}}$ <u>reste borné, alors la famille des</u> $\mathcal{F}_{(r)}$ <u>est limitée</u>.

DÉMONSTRATION. - Quitte à remplacer S par une réunion de sous-schémas de S recouvrant S, on peut supposer qu'il existe un morphisme <u>fini</u> $f : X \to \mathcal{P}^r_S$, tel que $\mathcal{O}_X(1)$ soit isomorphe à l'image inverse de $\mathcal{O}_{\mathcal{P}^r_S}(1)$, donc pour tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur X, on a $P_{\mathcal{F}} = P_{f_*(\mathcal{F})}$. D'autre part, on vérifie facilement (par la technique du numéro précédent) qu'un ensemble de faisceaux $\mathcal{F}$ sur X est limité si et seulement si l'ensemble des $f_*(\mathcal{F})$ l'est. Enfin on a

$$f_*(\mathcal{F})_{(r)} = f_*(\mathcal{F}_{(r)}) \quad ,$$

Cela nous ramène donc au cas où $X = \mathbb{P}^r_S$. De plus, on peut supposer que $\mathcal{L} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r_S}(k)^s$ pour k, s convenables. Le coefficient $a_{\mathcal{F}}$ satisfait

$$0 \leq a_{\mathcal{F}} \leq s$$

et reste donc borné. Cela dit, il revient au même de dire que les $P_{\mathcal{F}}(n)$ ont un coefficient de n^{r-1} restant minoré (resp. borné) ou de le dire pour les $P_{\mathcal{F}}(n-k) = P_{\mathcal{F}(-k)}(n)$. Cela nous ramène au cas où

$$\mathcal{L} = \mathcal{O}^s_{\mathbb{P}^r_S} \quad .$$

Considérons la suite exacte

$$0 \to N_r \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}_{(r)} \to 0 \quad ,$$

d'où

$$P_{\mathcal{F}} = P_{\mathcal{F}_{(r)}} + P_{N_r} \quad ,$$

et comme le coefficient de n^{r-1} dans P_{N_r} est positif (car $\dim \operatorname{supp} N_r \leq r-1$), on a

$$b_{\mathcal{F}_{(r)}} \leq b_{\mathcal{F}} \quad .$$

Cela nous permet, pour prouver les assertions du lemme, de remplacer $\mathcal{F}$ par $\mathcal{F}_{(r)}$, i. e. de supposer que les quotients $\mathcal{F}$ envisagés de $\mathcal{L}$ sont sans torsion.

Comme $\mathbb{P}^r_K$ est normal, il s'ensuit que $\mathcal{F}$ est localement libre de rang à $a = a_{\mathcal{F}}$ dans un ouvert $U = \mathbb{P}^r_K - Y$, où Y est de codimension ≥ 2. Donc $\overset{a}{\wedge}\mathcal{F}$ est un faisceau sur P^r_K dont la restriction à U est inversible, donc ($\mathbb{P}^r_K$ étant régulier et Y de codimension ≥ 2) isomorphe à la restriction d'un faisceau inversible sur $\mathbb{P}^r_K$, défini à un isomorphisme près. Ce dernier est de la forme $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r_K}(d)$ pour un entier d bien déterminé. Comme $\overset{a}{\wedge}\mathcal{F}$ est un quotient de $\overset{a}{\wedge}\mathcal{O}^n_{\mathbb{P}^r_K} \simeq \mathcal{O}^N_{\mathbb{P}^r_K}$, avec $N = \binom{n}{a}$, il admet N sections canoniques, définissant donc des sections de

$\mathcal{O}_{\mathcal{P}^r_K}(d)$ sur U, qui sont restrictions de sections s_i ($1 \leq i \leq N$) de $\mathcal{O}_{\mathcal{P}^r_K}(d)$, (puisque $\mathcal{P}^r_K$ est normal et Y de codimension ≥ 2). Ces dernières engendrent $\mathcal{O}_{\mathcal{P}^r_K}(d)$ aux points de U, donc ne sont pas toutes nulles, ce qui implique que l'on a $d \geq 0$. D'autre part, un calcul facile montre qu'on a

$$b_{\mathfrak{F}} = a_{\mathfrak{F}}(r + 1)/2 + d \quad .$$

Cela montre en particulier que $b_{\mathfrak{F}} \geq 0$, donc $b_{\mathfrak{F}}$ est minoré. Il reste borné si et seulement si d reste borné, montrons qu'alors $\mathfrak{F}$ reste dans une famille limitée. On peut supposer $a_{\mathfrak{F}}$ et $b_{\mathfrak{F}}$ fixés, soient a et b, donc d fixé. La connaissance des N sections s_i de $\mathcal{O}_{\mathcal{P}^r_K}(d)$, i. e. d'un homomorphisme $s : \overset{a}{\bigwedge} \mathcal{E}_K \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{P}^r_K}(d)$, permet de récupérer $\mathfrak{F}$ comme la co-image de l'homomorphisme composé correspondant :

$$\mathcal{E}_K \rightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(\overset{a-1}{\bigwedge} \mathcal{E}_K, \overset{a}{\bigwedge}\mathcal{E}_K) \rightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(\overset{a-1}{\bigwedge} \mathcal{E}_K, \mathcal{O}_{\mathcal{P}^r_K}(d)) \quad ,$$

où le premier est l'homomorphisme canonique provenant du produit extérieur, et le deuxième est déduit de s. On conclut alors par (1.2) (i).

La conjonction des deux lemmes précédents permet de prouver :

LEMME 2.6. - <u>Supposons sous les conditions préliminaires de (2.1) que l'on ait pour tout</u> $\mathfrak{F}$:

$$P_{\mathfrak{F}}(n) = a_{\mathfrak{F}} n^r/r! + b_{\mathfrak{F}} n^{r-1}/(r-1)! + \text{termes de degré} < r - 1 \quad ,$$

<u>et que les coefficients</u> $a_{\mathfrak{F}}$ <u>restent bornés. Alors les coefficients</u> $b_{\mathfrak{F}}$ <u>restent minorés. Si les</u> $b_{\mathfrak{F}}$ <u>sont bornés, alors les</u> $\mathfrak{F}_{(r)}$ <u>sont limités.</u>

On peut supposer que les corps de base K pour les faisceaux $\mathfrak{F}$ sont algébriquement clos. Munissons chaque supp $\mathfrak{F}_{(r)}$ = réunion des composantes de degré r de supp $\mathfrak{F}$, de la structure réduite induite. Alors les degrés des supp $\mathfrak{F}_{(r)}$ restent majorés par a, donc en vertu de (2.4) les supp $\mathfrak{F}_{(r)}$ forment un ensemble limité. De plus, pour toute composante de supp $\mathfrak{F}_{(r)}$, la longueur de $\mathfrak{F}_{(r)}$ pour cette composante est $\leq a$, donc si $\mathcal{J}_{\mathfrak{F}}$ est l'Idéal qui définit supp $\mathfrak{F}_{(r)}$, alors $\mathfrak{F}_{(r}$

peut être considéré comme un Module sur le sous-schéma $Y_{\mathcal{F}}$ de X défini par $\mathcal{J}_{\mathcal{F}}^{a}$. Comme dans le lemme précédent, on se ramène aussi au cas où on a $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{(r)}$, donc $\mathcal{F}$ provient d'un Module sur $Y_{\mathcal{F}}$. Les $Y_{\mathcal{F}}$ correspondent à une famille limitée de Modules quotients des $\mathcal{O}_{X_K}$, donc proviennent d'un sous-schéma fermé Y d'un schéma $X \times_S T$. On peut alors appliquer (2.5) à Y/T et $\mathcal{L} \otimes_X Y$, d'où la conclusion.

Nous pouvons maintenant prouver (2.2) par récurrence sur la borne supérieure r des dim supp $\mathcal{F}$. L'énoncé est trivial pour $r < 0$, supposons donc $r \geq 0$ et l'énoncé prouvé pour les $r' < r$. En vertu de (2.6) les $\mathcal{F}_{(r)}$ forment un ensemble limité, donc aussi en vertu de (1.2) (i) les noyaux des homomorphismes $\mathcal{L}_K \to \mathcal{F}_{(r)}$; il existe donc un Module cohérent $\mathcal{L}'$ sur X, tel que les noyaux en question, donc aussi les $N_r(\mathcal{F}) = \mathrm{Ker}(\mathcal{F} \to \mathcal{F}_{(r)})$, soient quotients des Modules $\mathcal{L}'_K$. Comme les $\mathcal{F}_{(r)}$ sont limités, les $P_{\mathcal{F}_{(r)}}$ restent bornés, et la formule

$$P_{\mathcal{F}} = P_{\mathcal{F}_{(r)}} + P_{N_r}$$

montre alors que les P_{N_r} satisfont à la même condition (b_s) que les $P_{\mathcal{F}}$. Donc les N_r satisfont les conditions (a) et (b_s), et par l'hypothèse de récurrence les $(N_r)_{(s)}$ restent limités. Or $\mathcal{F}_{(s)}$ est une extension de $\mathcal{F}_{(r)}$ par $(N_r)_{(s)}$, donc par (1.2) (ii), les $\mathcal{F}_{(s)}$ restent limités. Pour la dernière assertion de (2.2), on note que les noyaux N_s de $\mathcal{F} \to \mathcal{F}_{(s-1)}$ restent limités en vertu de (1.2) (i), et que le coefficient du terme en n^{s-1} dans P_{N_s} reste borné ; le lemme 2.6 prouve alors que le coefficient du terme suivant reste minoré. Cela achève la démonstration.

3. Schémas de Hilbert : définition, théorème d'existence.

Soient X un préschéma sur un autre S, et $\mathcal{F}$ un Module quasi-cohérent sur X. Désignons par

$$\mathrm{Quot}(\mathcal{F}/X/S)$$

l'ensemble des Modules quasi-cohérents quotients de $\mathcal{F}$ qui sont plats sur S. Soit maintenant $S' \to S$ un morphisme de changement de base, posons $X' = X \times_S S'$ et $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S'}$, donc X' est un préschéma sur S' muni d'un Module quasi-cohérent $\mathcal{F}'$, et on peut considérer $\mathrm{Quot}(\mathcal{F}'/X'/S')$. On pose

$$\underset{\sim}{\mathrm{Quot}}_{\mathcal{F}/X/S}(S') = \mathrm{Quot}(\mathcal{F}'/X'/S') \qquad (\text{où } X' = X \times_S S') \quad .$$

Si maintenant $S'' \to S'$ est un S-morphisme, alors $X'' = X \times_S S''$ est isomorphe à $X' \times_{S'} S''$ et $\mathcal{F}''$ à $\mathcal{F}' \otimes_{\mathcal{O}_{S'}} \mathcal{O}_{S''}$, et comme le foncteur image inverse $\mathcal{G}' \rightsquigarrow \mathcal{G}' \otimes_{\mathcal{O}_{S'}} \mathcal{O}_{S''}$ de la catégorie des Modules quasi-cohérents sur X' dans la catégorie des Modules quasi-cohérents sur X'' est exact à droite et transforme Modules S'-plats en Modules S''-Plats, on trouve une application naturelle

$$\mathrm{Quot}(\mathcal{F}'/X'/S') \to \mathrm{Quot}(\mathcal{F}''/X''/S'') \quad ,$$

donc $\underset{\sim}{\mathrm{Quot}}_{\mathcal{F}/X/S}(S')$ est un <u>foncteur contravariant en</u> S' (préschéma au dessus de S), à valeurs dans la catégorie des ensembles. Par la suite, nous supposerons que X est <u>projectif</u> sur S <u>noethérien</u>, $\mathcal{F}$ <u>cohérent</u>, et nous nous limiterons pour simplifier à des S' sur S qui sont localement noethériens.

THÉORÈME 3.1. - <u>Sous ces conditions, le foncteur contravariant $\underset{\sim}{\mathrm{Quot}}_{\mathcal{F}/X/S}$ sur la catégorie des S-préschémas localement noethériens est représentable par un S-préschéma $\mathrm{Quot}_{\mathcal{F}/X/S}$, somme d'une suite de S-schémas projectifs (a fortiori $\mathrm{Quot}_{\mathcal{F}/X/S}$ est localement de type fini sur S)</u> .

Nous obtiendrons une telle décomposition de la façon suivante. Soit $\mathcal{O}_X(1)$ un faisceau inversible sur X très ample relativement à S . Pour tout polynôme $P(n)$ à coefficients rationnels, soit $\mathrm{Quot}^P(\mathcal{F}/X/S)$ la partie de $\mathrm{Quot}(\mathcal{F}/X/S)$ formé des quotients cohérents $\mathcal{G}$ de $\mathcal{F}$ qui sont plats sur S et dont le polynôme de Hilbert en tout $s \in S$ est égal à $\mathcal{F}$. On posera alors

$$\underset{\sim}{\mathrm{Quot}}^P_{\mathcal{F}/X/S}(S') = \mathrm{Quot}^P(\mathcal{F}'/X'/S')$$

et on obtient ainsi un sous-foncteur de $\underset{\sim}{\mathrm{Quot}}_{\mathcal{F}/X/S}$. La propriété d'invariance des polynômes de Hilbert rappelée dans le numéro 2 implique ceci : <u>Pour que $\underset{\sim}{\mathrm{Quot}}_{\mathcal{F}/X/S}$ soit représentable, il faut et il suffit que les $\underset{\sim}{\mathrm{Quot}}^P_{\mathcal{F}/X/S}$ le soient, et alors le S-préschéma $\mathrm{Quot}_{\mathcal{F}/X/S}$, qui le représente, est isomorphe au préschéma somme des $\mathrm{Quot}^P_{\mathcal{F}/X/S}$ qui représentent les foncteurs $\underset{\sim}{\mathrm{Quot}}^P_{\mathcal{F}/X/S}$</u> . Ceci posé, (3.1) sera donc une conséquence du théorème suivant :

THÉORÈME 3.2. - Avec les notations précédentes, le foncteur $\underline{\mathrm{Quot}}^{P}_{\mathcal{F}/X/S}$ est représentable par un S-préschéma projectif $\mathrm{Quot}^{P}_{\mathcal{F}/X/S}$.

La suite de ce numéro est consacrée à la démonstration de (3.2).

Soit ν un entier. Pour tout S' au-dessus de S, nous désignons par $A_{\nu}(S')$ l'ensemble des quotients $\mathcal{G} = \mathcal{F}'/\mathcal{H}$ de $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S'}$, cohérents, plats sur S', et satisfaisant les conditions suivantes :

a. $R^i f'_*(\mathcal{G}(n)) = 0$ pour $i > 0$ et $n \geqslant \nu$

b. $R^i f'_*(\mathcal{H}(n)) = 0$ pour $i > 0$ et $n \geqslant \nu$

c. $f'_*(\mathcal{H}(\nu + k)) = \mathcal{S}'_k\, f'_*(H(\nu))$ pour $k \geqslant 0$.

Pour cette dernière relation, on suppose que X est écrit comme le spectre premier homogène d'une algèbre graduée quasi-cohérente $\mathcal{S}_*$ sur S, à degrés positifs, engendrée par $\mathcal{S}_1$; et on pose $\mathcal{S}' = \mathcal{S} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S'}$, de sorte que X' est le spectre premier homogène de $\mathcal{S}'$. Pour prouver (3.2), on se ramène d'ailleurs facilement au cas où $X = \mathcal{P}^r_S$ (puisque S est réunion d'ouverts u tels que $X|U$ soit un sous-schéma fermé de $\mathcal{P}^r_U$ et $\mathcal{O}_X(1)$ induit par $\mathcal{O}_{\mathcal{P}^r_u}(1)$), et où $\mathcal{F}$ est de la forme $(\mathcal{O}_{\mathcal{P}^r_S})^N$, donc est plat sur S. Alors dans ce qui précède, les faisceaux $\mathcal{H}$ sont également plats S'. Il résulte alors des relations de Künneth ([5], III, § 7), et de (b) que les conditions (a) et (b) sont stables par changement de base, et impliquent que pour $n \geqslant \nu$, la formation de $f'_*(\mathcal{G}(n))$ et de $F'_*(\mathcal{H}(n))$ commute à l'extension de la base (loc. cit.), donc (c) est également stable par extension de la base. En d'autres termes, $A_{\nu}(S')$ est un foncteur contravariant en S', de façon précise un sous-foncteur de $A(S') = \underline{\mathrm{Quot}}^{P}_{\mathcal{F}/X/S}(S')$. Pour ν variable, on obtient ainsi une suite croissante de parties $A_{\nu}(S')$ de $A(S')$, dont la réunion est $A(S')$ en vertu d'un théorème bien connu de SERRE [5], III, § 2. Notons maintenant que si $\mathcal{G}$ est un quotient cohérent de $\mathcal{F}'$, plat sur S, s un élément de S tel que le changement de base, $\mathrm{Spec}(k(s)) \to S$ donne lieu à un quotient G_s de F_s satisfaisant aux conditions (a), (b), (c), i. e. qui est dans $A_{\nu}\,\mathrm{Spec}(k(s))$, alors il existe un voisinage ouvert U de s tel que ces mêmes conditions soient vérifiées pour $\mathcal{G}|f'^{-1}(U)$, i. e. ce quotient est dans $A_{\nu}(U)$; pour (a) et (b), cela résulte en effet du "théorème des fonctions holomorphes" [5], III, § 7, et (c) résulte du lemme de Nakaymama, et du fait qu'on sait en tous cas que $f'_*(\mathcal{H}(n + k)) = \mathcal{S}'_k\, f'_*(\mathcal{H}(n))$

pour n assez grand, et $k \geqslant 0$, (cf. [5], III, § 2). De ces remarques on conclut ceci (comparer [4], IV,). Pour que le foncteur A soit représentable, il faut et il suffit que les foncteurs A_ν le soient, et alors le S-préschéma Q qui représente A est réunion croissante d'ouverts Q_ν représentant les A_ν .

Soit

$$M_* = \sum_{n\geqslant 0} f_*(\mathcal{F}(n)) = \mathcal{S}_*^N \quad ,$$

de sorte que l'on a

$$M'_* = M_* \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S'} = \sum_{n\geqslant 0} f'_*(\mathcal{F}(n)) = \mathcal{S}'^N_* \quad .$$

Il résulte de (a) que l'on a :

(a') $f'_*(\mathcal{G}(n))$ est localement libre de rang $P(n)$ pour $n \geqslant \nu$, [5], III, § 7, et de (b), pour $i = 1$:

(a") $f'_*(\mathcal{G}(n))$ est un Module quotient de M'_n .

D'ailleurs, la connaissance de ce Module quotient, pour $n = \nu$, implique en vertu de (c) celle des sous-Modules $f'_*(\mathcal{K}(n))$ de M_n pour $n \geqslant \nu$, donc la connaissance de $\mathcal{K}$ et par suite de $\mathcal{G}$. On obtient ainsi une application injective

$$A_\nu(S') \rightarrow \underset{\sim}{\mathrm{Grass}}_{P(\nu)}(M'_\nu)$$

de $A_\nu(S')$ dans l'ensemble des Modules quotients localement libres de rang $P(\nu)$ de M' , d'où un homomorphisme fonctoriel

$$i_\nu : A_\nu(S') \rightarrow \underset{\sim}{\mathrm{Grass}}_{P(\nu)}(M_\nu)(S') \quad ,$$

où le foncteur du deuxième membre est représentable par le schéma grassmanien $\mathrm{Grass}_{P(\nu)}(M_\nu)$ (comparer [4], V), qui est projectif sur S . Je dis :

LEMME 3.3. - $A_\nu(S')$ est un foncteur représentable, et le morphisme $Q_\nu \rightarrow \mathrm{Grass}_{P(\nu)}(M_\nu)$ qui représente l'homomorphisme i_ν est une immersion (ce qui implique que Q_ν est quasi-projectif sur S).

Cette assertion est équivalente à la suivante (comparer [4], IV) : Supposons donné un Module quotient N de M'_ν , localement libre de rang $P(\nu)$, alors il existe un sous-préschéma Z de S' tel que pour tout préschéma localement noethérien T'

sur S' , l'image inverse de N sur T' est dans $\mathrm{Im}\, A_\nu(T')$ si et seulement si $T' \to S'$ est majoré par le sous-préschéma Z . Changeant de notations, on peut supposer $S' = S$, i. e. on s'est donné un quotient N_ν de M_ν par un sous-Module R_ν . Pour qu'il provienne d'un élément de $A(s)$, il faut et il suffit qu'il satisfasse les deux conditions suivantes :

(i) $M_{\nu+k}/\mathcal{S}_k R_\nu$ est localement libre de rang $P(\nu + k)$ pour $k \geqslant 0$.

(ii) Le sous-faisceau $\mathcal{K}$ de $\mathcal{F}$ défini par le sous-Module gradué $R_* = \sum_{k\geqslant 0} \mathcal{S}_k R_\nu$ de M_* ([5], II, § 3) et le quotient $\mathcal{G} = \mathcal{F}/\mathcal{K}$, satisfont les conditions (a) et (b) plus haut. Ces conditions sont manifestement nécessaires, d'autre part si elles sont vérifiées, alors le faisceau $\mathcal{G}$ défini dans (ii), étant isomorphe au faisceau associé au $\mathcal{S}_*$-Module gradué N_* somme des $M_{n+k}/\mathcal{S}_k R$, est <u>plat</u> sur S (car ses fibres sont des facteurs directs de modules localisés de N pour des idéaux premiers homogènes de $\mathcal{S}_*$), et correspond au polynôme de Hilbert P en vertu de (i). Compte tenu de (ii), on voit alors que (a') et (a") sont vérifiés, donc pour $n \geqslant \nu$, l'homomorphisme naturel $N_n \to f_*(\mathcal{G}(n))$ est un homomorphisme <u>surjectif</u> de Modules localement libres de même rang, donc un isomorphisme, donc on a $f_*(\mathcal{K}(\nu + k)) = \mathcal{S}_k R_\nu$ pour tout $k \geqslant 0$, ce qui prouve que $\mathcal{G} \in A_\nu(S)$ et que R_ν est l'élément de $\mathrm{Grass}_{P(\nu)}(M_\nu)$ défini par $\mathcal{G}$.

Ce critère (i) (ii) s'applique également à la situation obtenue après un changement de base $S' \to S$. Nous allons prouver d'abord que le fait que la condition (i) soit vérifiée après le changement de base $S' \to S$, s'exprime par la condition que $S' \to S$ est majoré par un certain sous-préschéma Z de S ; une fois ce résultat obtenu, on est ramené (remplaçant S par Z) au cas où la condition (i) est déjà vérifiée sur S , et comme elle est stable par changement de base, il reste à exprimer la condition (ii). Mais alors, si U désigne l'ensemble des $s \in S$ tels que la cohomologie des faisceaux induits sur la fibre X_s par $\mathcal{G}(n)$ et $\mathcal{K}(n)$ soit nulle en dimension > 0 pour $n \geqslant \nu$, on a déjà signalé que U est ouvert, et la condition (ii) sera vérifiée après un changement de base $S' \to S$ si et seulement si $S' \to S$ est majoré par U , ce qui prouve le lemme 3.3. Il reste donc à prouver le lemme suivant :

LEMME 3.4. - <u>Soient</u> S <u>un préschéma localement noethérien, muni d'une algebre graduée quasi-cohérente</u> $\mathcal{S}_*$ <u>à degrés positifs, engendrée par</u> $\mathcal{S}_1$, M_* <u>un</u> $\mathcal{S}$<u>-Module gradué quasi-cohérent de type fini,</u> P <u>un polynôme à coefficients rationnels,</u> ν <u>un entier. Alors il existe un sous-préschéma</u> Z <u>de</u> S <u>(évidemment unique)</u>

ayant la propriété suivante : Pour tout préschéma S' *sur* S , *pour que* $M_n \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S'}$ *soit localement libre de rang* $P(n)$ *pour tout* $n \geq \nu$, *il faut et il suffit que* $S' \to S$ *soit majoré par* Z .

On peut évidemment supposer S affine, donc noethérien. Alors :

LEMME 3.5. - *Pour tout entier* $N \geq \nu$, *soit* U_N *l'ouvert de* S *formé des* $s \in S$ *tels que* $\operatorname{rang}_{k(s)} M_{ns} \otimes_{\mathcal{O}_{S,s}} k(s) \leq P(n)$ *pour tout* $\nu \leq n \leq N$. *Alors la suite décroissante des ouverts* U_N *est stationnaire*.

On sait [3], IV, que S admet une partition finie en sous-préschémas réduits S_i , tels que chaque $M \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S_i}$ soit *plat* sur S : On peut donc supposer M plat, donc les M_n plats. Enfin, on peut évidemment supposer S connexe. Mais alors il existe un entier n_o et un polynôme Q tels que

$$\operatorname{rang}_{k(s)} M_{ns} \otimes_{\mathcal{O}_{S,s}} k(s) = Q(n) \quad \text{pour} \quad n \geq n_o$$

[5], III, § 7. Supposons d'abord $P \neq Q$ donc $P(n) \neq Q(n)$ pour n grand, alors on a évidemment $U_N = \emptyset$ pour N grand, a fortiori la suite des U_N est stationnaire. Si au contraire $P = Q$, alors on aura $U_N = U_{n_o}$ pour $N \geq n_o$, et la suite des U_N est encore stationnaire.

En particulier, l'ensemble U_∞ des $s \in S$ tels que

$$(*) \qquad \operatorname{rang}_{k(s)} M_{ns} \otimes_{\mathcal{O}_{S,s}} k(s) \leq P(n) \quad \text{pour tout} \quad n \geq \nu \qquad ,$$

étant l'intersection des U_N , est ouvert. On peut alors, pour la démonstration de (3.4), remplacer S par l'ouvert U , ce qui nous ramène au cas où l'inégalité $(*)$ est satisfaite en tout $s \in S$. D'ailleurs :

LEMME 3.6. - *Soit* M *un Module sur un préschéma localement noethérien* S , *et* r *un entier. Alors il existe un sous-préschéma* Z *de* S *(évidemment unique) ayant la propriété suivante : pour tout* S' *sur* S , *pour que* $M \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S'}$ *soit localement libre de rang* r , *il faut et il suffit que* $S' \to S$ *soit majoré par* Z . *Si on a* $\operatorname{rang}_{k(s)} M_s \otimes_{\mathcal{O}_{S,s}} k(s) \leq r$ *pour tout* s , *alors* Z *est un sous-préschéma fermé de* S (on suppose M cohérent).

En effet, le raisonnement précédent nous ramène au cas où on a l'inégalité (*) pour tout $s \in S$ (en remplaçant au besoin S par la partie ouverte formée des s où l'inégalité est vérifiée). On peut alors supposer que M s'insère dans une suite exacte

$$\mathcal{O}_S^q \to \mathcal{O}_S^r \to M \to 0 \quad ,$$

et la condition envisagée sur les S' sur S signifie aussi que dans la suite exacte $\mathcal{O}_{S'}^q \to \mathcal{O}_{S'}^r \to M' \to 0$ correspondante, la deuxième flèche est un isomorphisme, i. e. la première est nulle. On voit alors que le sous-préschéma fermé Z de S défini par l'Idéal engendré par les coefficients de la matrice définissant l'homomorphisme $\mathcal{O}_S^q \to \mathcal{O}_S^r$, satisfait à la condition voulue.

Revenant alors à la démonstration de (3.4) où nous l'avions laissée, on désigne par Z_n le sous-schéma fermé de S associé en vertu de (3.6) au Module M_n et à l'entier $r = P(n)$, par Z_N' le Inf des Z_n pour $\nu \leq n \leq N$. Alors les Z_N forment une suite décroissante de sous-schémas fermés de Z, donc nécessairement stationnaire. Soit Z la valeur constante des Z_W pour N grand. C'est le Z cherché dans (3.4). Cela achève la démonstration de (3.4), donc aussi celle de (3.3).

On a donc prouvé que $\underset{\sim}{\mathrm{Quot}}^P_{\mathcal{F}/X/S}$ est représentable par un S-préschéma Q qui est une réunion croissante de sous-préschémas ouverts Q_ν quasi-projectifs sur S. Pour aller plus loin, il faut invoquer le théorème 2.1, d'où on conclut facilement que Q est quasi-compact, (car image du préschéma de type fini S' sur S qui paramètre la famille des faisceaux quotients des $\mathcal{F}_K$ ayant le polynôme de Hilbert P). Donc Q est égal à l'un des Q_ν, donc quasi-projectif sur S. Pour prouver qu'il est projectif sur S, il reste donc à prouver qu'il est propre sur S, et pour cela il suffit d'invoquer le critère valuatif de propreté sous la forme [5], II,7.3.8. Il suffit de vérifier ceci :

LEMME 3.7. - Soient S le spectre d'un anneau de valuation discrète, s son point générique, X un préschéma sur S, $\mathcal{F}$ un Module quasi-cohérent sur X, $\mathcal{G}_s$ un Module quotient quasi-cohérent de $\mathcal{F}_s = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_S} k(s)$ sur X_s. Alors il existe un Module quotient quasi-cohérent $\mathcal{G}$ unique de $\mathcal{F}$, plat sur S, et dont la restriction à X_s soit $\mathcal{G}_s$.

En effet, si $\mathcal{G}_s = \mathcal{F}_s/\mathcal{K}_s$, il suffit de considérer le plus grand sous-faisceau $\mathcal{K}$ de $\mathcal{F}$ induisant $\mathcal{K}_s$, [5], I, 9.4.2 et de prendre $\mathcal{G} = \mathcal{F}/\mathcal{K}$. On vérifie facilement que ce faisceau convient.

Le théorème 3.2, et par suite (3.1) est complètement démontré.

La démonstration prouve en même temps ceci :

PROPOSITION 3.8. - Sous les conditions de (3.2), soient $Q = \underline{\mathrm{Quot}}^P_{\mathcal{F}/X/S}$, $X_Q = X \times_S Q$, $F_Q = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_Q$, et soit $\mathcal{G}$ le quotient cohérent de $\mathcal{F}_Q$, plat sur Q , ayant le polynôme de Hilbert relatif P , tel que $(Q , \mathcal{G})$ représente le foncteur $\mathrm{Quot}^P_{\mathcal{F}/X/S}$. Il existe un entier ν tel que, pour $n \geq \nu$, $(f_Q)_*(\mathcal{G}(n))$ soit un Module sur Q localement libre de rang $P(n)$, et très ample relativement à S , i. e. définissant une immersion de Q dans un schéma grassmanien $\mathrm{Grass}_{P(n)}(M)$ sur S , A fortiori, pour $n \geq \nu$, le faisceau $\bigwedge^{P(n)}(f_Q)_*(\mathcal{G}(n))$ sur Q est inversible très ample relativement à S .

On peut en effet se ramener, comme pour (3.2), au cas où F est plat sur S , et alors il suffit de prendre un entier ν tel que $A_\nu = A$ (avec les notations précédentes).

Le cas le plus important d'application de (3.2) est celui où $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$. On écrit alors

$$\underline{\mathrm{Quot}}_{\mathcal{O}_X/X/S} = \underline{\mathrm{Hilb}}_{X/S} , \quad \underline{\mathrm{Quot}}^P_{\mathcal{O}_X/X/S} = \underline{\mathrm{Hilb}}^P_{X/S} ,$$

donc on a une décomposition

$$\underline{\mathrm{Hilb}}_{X/S} = \coprod_P \underline{\mathrm{Hilb}}^P_{X/S} .$$

Par définition, $\underline{\mathrm{Hilb}}_{X/S}$ représente le foncteur $\mathrm{Hilb}_{X/S}(S') =$ ensemble des sous-préschémas fermés de $X' = X \times_S S'$ qui sont plats sur S ; et $\underline{\mathrm{Hilb}}^P_{X/S}$ représente le sous-foncteur correspondant aux sous-préschémas fermés admettant un polynôme de Hilbert donné P . Ces préschémas sont aussi appelés le <u>préschéma de Hilbert</u> de X sur S , respectivement le <u>préschéma de Hilbert d'indice</u> P . La terminologie est justifiée par le rôle joué dans la théorie par les polynômes de Hilbert. Leur différence de nature avec les classiques variétés de Chow (destinées à paramétrer des cycles, et non des variétés) est du même ordre qu'entre l'anneau de Chow des classes de cycles d'une variété, et l'anneau des classes de faisceaux de la variété (telle qu'il s'introduit dans le théorème de Riemann-Roch [1]) ; on notera en effet que lorsque $X = \mathcal{P}^r_S$, S étant le spectre d'un corps, la connaissance du polynôme de Hilbert d'un Module cohérent $\mathcal{F}$ sur X équivaut aussi à celle des classes de Chern de $\mathcal{F}$, ou encore de la classe de $\mathcal{F}$ dans l'anneau des classes de faisceaux cohérents sur X .

REMARQUES 3.9. - On notera aussi que la construction des $\underline{\mathrm{Quot}}_{\mathcal{F}/X/S}$ et $\underline{\mathrm{Quot}}^P_{\mathcal{F}/X/S}$ a été ramenée au cas où $X = \mathcal{P}^r_S$, $\mathcal{F} = \mathcal{O}^N_X$, $\mathcal{O}_X(1)$ étant le faisceau très ample habituel ; de façon précise, les $\underline{\mathrm{Quot}}_{\mathcal{F}/X/S}$ généraux se réalisent comme des sous-préschémas fermés des précédents. Comme la formation des $\underline{\mathrm{Quot}}^P_{\mathcal{F}/X/S}$ est évidemment compatible avec les changements de base $S' \to S$, on voit qu'on est ramené au cas où on a de plus $S = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$. En fin de compte, on est donc ramené à étudier les schémas projectifs sur $\mathbb{Z}$:

$$\mathcal{Q}^P_{r,N} = \underline{\mathrm{Quot}}_{(\mathcal{O}_{\mathcal{P}^r_{\mathbb{Z}}})^N/\mathcal{P}^r_{\mathbb{Z}}/\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})} ,$$

et plus particulièrement les schémas de Hilbert absolus :

$$\underline{\mathrm{Hilb}}^P_r = \mathcal{Q}^P_{r,1} .$$

Une étude plus détaillée de ces schémas, à commencer par la détermination de leurs composantes connexes (sont-ils connexes ?), leurs composantes irréductibles (en vertu de SERRE [7], il peut y avoir des composantes irréductibles qui se trouvent tout entières sur un nombre premier $p \neq 0$), serait fort intéressante. Rappelons la question de WEIL si les composantes irréductibles des fibres de $\underline{\mathrm{Hilb}}^P_r$ sur les $s \in \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ correspondent à des extensions "régulières" du corps premier, i. e. si elles sont "relativement connexes". Il n'est pas exclu que ces questions soient plus abordables pour les schémas de Hilbert que pour les "variétés de Chow".

4. Variantes.

a. Sous les conditions de (3.1), soit U un ouvert dans X , et désignons par A' le sous-foncteur de $A = \underline{\mathrm{Quot}}_{\mathcal{F}/X/S}$, tel que $A'(S')$ soit l'ensemble des Modules quotients $\mathcal{G}$ de $\mathcal{F}'$, plats sur S' , dont le support est contenu dans U' . On voit aussitôt que A' est représentable par une partie ouverte du préschéma $\underline{\mathrm{Quot}}_{\mathcal{F}/X/S}$ qui représente A . Il s'ensuit que les théorèmes (3.1) et (3.2) restent valables en supposant que X est <u>quasi-projectif</u> sur S au lieu de projectif sur S, quand on remplace aussi dans les conclusions les mots "projectif" par "quasi-projectif", et qu'on désigne maintenant par $\underline{\mathrm{Quot}}_{\mathfrak{F}/X/S}(S')$ l'ensemble des quotients cohérents $\mathcal{G}$ de $\mathfrak{F}'$, plats sur S', <u>dont le support est propre sur</u> S'.

b. De façon générale, on peut imposer aux quotients G de $\mathfrak{F}' = \mathfrak{F} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S'}$ plats sur S' toutes sortes de conditions naturelles supplémentaires, stables par changement de base, obtenant ainsi autant de sous-foncteurs de $\underline{\mathrm{Quot}}_{\mathfrak{F}/X/S}$ qu'on se propose de représenter. Le critère habituel permet dans beaucoup de cas de prouver qu'on obtient encore des foncteurs représentables par des parties ouvertes de $\underline{\mathrm{Quot}}_{\mathfrak{F}/X/S}$. Il en est en particulier ainsi lorsqu'on impose l'une des propriétés supplémentaires suivantes :

1° Les dimensions des cycles premiers associés aux Modules G_s, ($s' \in S'$) induits sur les fibres $X'_{s'}$, appartiennent à un ensemble donné d'entiers.

2° (Lorsque $\mathfrak{F} = \mathcal{O}_X$, donc $\mathcal{G}$ correspond à un sous-préschéma fermé Y de X'); Y est un préschéma <u>simple</u> ([3], IV) sur S, resp. <u>normal</u> sur S (i. e. les fibres $Y_{s'}$ sont normales "sur $k(s)$", i. e. sont normales par toute extension du corps de base), resp. (lorsque X est plat sur S) sont des k-intersections complètes locales dans X relativement à S (i. e. les fibres $Y_{s'}$ sont des intersections complètes locales dans les $X_{s'}$).

D'autres conditions feraient intervenir des propriétés de nature cohomologiques sur les Modules $G_{s'}$ induits sur les $X'_{s'}$, etc. Bien entendu, la conjonction de conditions dont chacune est représentée par un ouvert U_i de $\underline{\mathrm{Quot}}_{\mathfrak{F}/X/S}$, est représentée par l'ouvert intersection. Par exemple, considérant pour tout S' sur S l'ensemble des sous-préschémas fermés Y de $X' = X \times_S S'$ qui sont des revêtements étales ([3], I) de rang donné r de S', on trouve un foncteur contravariant représentable en S'.

c. Les préschémas $\underline{\mathrm{Hom}}_S(X, Y)$, $\prod_{X/S}(Z/X)$, $\underline{\mathrm{Isom}}_S(X, Y)$, définis dans [2], II, C, n° 2, existent moyennant des hypothèses projectives convenables, et se réalisent comme des ouverts dans des préschémas de Hilbert convenables. Comme on a $\underline{\mathrm{Hom}}_S(X, Y) = \prod_{X/S}((X \times Y)/X)$, le cas de $\underline{\mathrm{Hom}}_S(X, X)$ se ramène à celui de $\prod_{X/S}(Z/X)$. On note alors que pour tout S' sur S, l'ensemble des sections de $Z' = Z \times_S S'$ sur $X' = X \times_S S'$ est en correspondance biunivoque avec l'ensemble des sous-préschémas Γ de Z (nécessairement fermés si Z est séparé sur X) tels que le morphisme $\Gamma \to X'$ induit par $Z' \to X'$ soit un isomorphisme. De cette façon,

<u>lorsque</u> X <u>est plat et propre sur</u> S , <u>et</u> Z <u>est quasi-projectif sur</u> S , $\underline{\prod_{X/S}}(Z/X)$ <u>existe et se réalise comme un sous-préschéma ouvert de</u> $\underline{\mathrm{Hilb}}_{Z/S}$. <u>Donc lorsque</u> X <u>est projectif et plat sur</u> S , <u>et</u> Y <u>quasi-projectif sur</u> S , $\underline{\mathrm{Hom}}_S(X\,,\,Y)$ <u>existe et se réalise comme un sous-préschéma ouvert de</u> $\underline{\mathrm{Hilb}}_{(X\times_S Y)/S}$. Lorsque X et Y sont tous les deux projectifs sur S , il s'ensuit aussitôt que $\underline{\mathrm{Isom}}_S(X\,,\,Y)$ existe également, et se représente par une partie ouverte de $\underline{\mathrm{Hom}}_S(X\,,\,Y)$. De même, lorsque X est plat et projectif sur S et Y quasi-projectif sur S , le S-préschéma $\underline{\mathrm{Imm}}_S(X/Y)$, correspondant au sous-foncteur du foncteur représenté par $\underline{\mathrm{Hom}}_S(X\,,\,Y)$ qui correspond aux S'-homomorphismes $X' \to Y'$ qui sont des immersions, est également représentable par une partie ouverte de $\underline{\mathrm{Hom}}_S(X\,,\,Y)$.

Soient $\mathcal{L}$ (resp. $\mathcal{M}$) un faisceau inversible sur X (resp. Y) très ample relativement à S , d'où un faisceau très ample $\mathcal{L}\otimes_{\mathcal{O}_S}\mathcal{M}$ sur $X\times_S Y$ relativement à S . Par suite, pour tout polynôme P à coefficients rationnels, $\underline{\mathrm{Hilb}}^P_{(X\times_S Y)/S}$ est défini et est un préschéma quasi-projectif sur S . Il induit donc sur $\underline{\mathrm{Hom}}_S(X\,,\,Y)$ une partie à la fois ouverte et fermée quasi-projective sur S , que nous noterons $\underline{\mathrm{Hom}}_S(X\,,\,Y)^P$. Donc les sections de $\underline{\mathrm{Hom}}_S(X\,,\,Y)^P$ sur S sont les S-morphismes $g : X \to Y$ tels que pour tout entier n , on ait

$$\chi((\mathcal{L}\otimes_{\mathcal{O}_X} g^*(\mathcal{M}))^{\otimes n}) = P(n) \quad .$$

On obtient de cette façon des généralisations du théorème de Matsusaka, affirmant que les automorphismes d'une variété projective "polarisée" forment un groupe algébrique, assertion qui prend ici une signification évidemment plus précise, puisque nous disposons d'une définition de ce groupe comme solution d'un problème universel. On notera d'ailleurs que, sur un corps algébriquement clos, le groupe des automorphismes considéré anciennement est celui déduit du "vrai" défini ici en divisant par les éléments nilpotents ; cela explique pourquoi il y a peu de chance que les constructions plus anciennes puissent se faire sur un corps de base non parfait, l'Idéal des éléments nilpotents apparaissant après extension du corps de base n'étant pas nécessairement "défini sur k ". Cette même remarque s'applique d'ailleurs également à la plupart des constructions ancien style.

5. Étude différentielle des schémas de Hilbert.

Elle découle du résultat suivant :

PROPOSITION 5.1. - Soient S un préschéma, S_0 un sous-préschéma défini par un Idéal quasi-cohérent $\mathcal{J}$ de carré nul, X un S-préschéma, $\mathcal{F}$ un Module quasi-cohérent sur X, $X_0 = \mathcal{F} \times_S S_0$ et $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S_0}$, enfin $\mathcal{G}_0 = \mathcal{F}_0/\mathcal{K}_0$ un Module quotient quasi-cohérent de $\mathcal{F}_0$, plat sur S_0. Pour tout ouvert U de X, soit $\mathcal{E}(U)$ l'ensemble des Modules quotients quasi-cohérents $\mathcal{G}$ de $\mathcal{F}|U$, plats sur S, et tels que $\mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S_0} = \mathcal{G}_0$; ainsi pour U variable, les $\mathcal{E}(U)$ sont les sections d'un faisceau $\mathcal{E}$ sur U. Ceci posé, le faisceau en groupes

$$\mathcal{Q} = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_{X_0}}(\mathcal{K}_0 , \mathcal{G}_0 \otimes_{\mathcal{O}_{S_0}} \mathcal{J})$$

opère de façon naturelle sur $\mathcal{E}$, qui devient ainsi un faisceau "formellement principal homogène sous $\mathcal{Q}$" (i. e. pour tout ouvert U dans X, $\mathcal{E}(U)$ est vide ou un ensemble principal homogène sous $\mathcal{Q}(U)$).

On en conclut :

COROLLAIRE 5.2. - Supposons qu'il existe localement sur X un prolongement $\mathcal{G}$ de $\mathcal{G}_0$ en un quotient de $\mathcal{F}$ plat sur S, (i. e. que les fibres du faisceau $\mathcal{E}$ soient non vides). Alors il existe une classe d'obstruction canonique

$$c(\mathcal{G}_0) \in H^1(X , \mathcal{Q}) \quad ,$$

dont l'annulation est nécessaire et suffisante pour l'existence d'un prolongement global $\mathcal{G}$ de $\mathcal{G}_0$ en un quotient de $\mathcal{F}$ plat sur S. Si cette classe est nulle, alors l'ensemble $\mathcal{E}(X)$ de tous les prolongements possibles est un ensemble principal homogène sous $\mathcal{Q}(X) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{K}_0 , \mathcal{G}_0 \otimes_{\mathcal{O}_{S_0}} \mathcal{J})$.

L'existence du prolongement global est alors garanti en particulier si $H^1(X , \mathcal{Q}) = 0$.

COROLLAIRE 5.3. - Supposons que $Q = \underline{\mathrm{Quot}}_{\mathcal{F}/X/S}$ existe (cf. 4. (a)) - par exemple que X soit quasi-projectif sur S localement noethérien, et $\mathcal{F}$ cohérent. Soit $x \in Q$, correspondant à une extension résiduelle $K = k(x)$ d'un $k(s)$ ($s \in S$) :

donc x est défini par un Module quotient cohérent $\mathcal{G}_o = \mathcal{F}_o/\mathcal{K}_o$ du Module $\mathcal{F}_o = F_K$ sur le K-préschéma X_K. Soit $\mathcal{A}$ le faisceau cohérent sur X_K défini par

$$\mathcal{A} = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_{X_o}}(\mathcal{K}_o , \mathcal{G}_o) \quad .$$

Alors l'espace tangent de Zariski de la fibre Q_s au point x (dual sur K de m/m^2, où m est l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{Q_K,x}$) est canoniquement isomorphe à $H^o(X_K , \mathcal{A})$.

Le résultat donnant l'espace tangent de Zariski peut se généraliser, et donne une caractérisation, pour un S-morphisme donné $g : S' \to Q$, i. e. une section g' de $Q' = Q \times_S S'$ sur S', du Module

$$\Omega = g^*(\Omega^1_{Q/S}) = g'^*(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2)$$

(où $\mathcal{J}$ est l'Idéal sur Q' défini par la section g' de Q' sur S'), par la formule fonctorielle en le Module cohérent $\mathcal{M}$ sur S' :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{S'}}(\Omega , \mathcal{M}) \simeq H^o(X' , \mathcal{A}) \quad ,$$

où $\mathcal{A}$ est encore le Module sur $X' = X \times_S S'$ défini par

$$\mathcal{A} = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_{X'}}(\mathcal{K} , \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{M}) \quad ,$$

($\mathcal{G} = \mathcal{F}'/\mathcal{K}$ étant le Module quotient de $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S'}$ qui correspond à g).
Il suffit en effet d'appliquer (5.1) en y remplaçant S_o par S', S par le préschéma $D(\mathcal{M}) = (S' , \mathcal{O}_{S'} + \mathcal{M})$, où $\mathcal{M}$ est considéré comme un Idéal de carré nul.

Lorsque dans (5.1), on a $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$, donc la donnée de $\mathcal{G}_o$ correspond à la donnée d'un sous-préschéma fermé Y_o de X_o plat sur S_o défini par l'Idéal $\mathcal{J}_o = \mathcal{M}_o$, alors (*) donne

$$\mathcal{A} = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_{X_o}}(\mathcal{J}_o/\mathcal{J}_o^2 , \mathcal{O}_{Y_o} \otimes_{\mathcal{O}_{S_o}} \mathcal{I}) \quad ,$$

où $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2$ s'interprète comme le faisceau conormal à Y_o dans X_o, qu'on note aussi

$\mathcal{N}_{Y_0/X_0}$; il y a alors intérêt à considérer $\mathfrak{a}$ comme un Module sur Y_0 , et de calculer H^0 et H^1 sur Y . D'ailleurs, si Y_0 est localement une intersection complète dans X_0 , X étant plat sur S , alors dans (5.1) la possibilité de prolongement local est garantie, d'autre part $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2$ est localement libre sur Y_0 et on peut écrire

$$\mathfrak{a} = \check{\mathcal{N}}_{X_0/Y_0} \otimes_{\mathcal{O}_{S_0}} \mathfrak{J} \qquad ,$$

où le premier facteur du deuxième membre est le faisceau normal à Y_0 dans X_0 . Utilisant le critère fondamental de simplicité ([3], III, 3.1), on trouve par exemple :

COROLLAIRE 5.4. - Sous les conditions de (5.3), supposons que $\mathfrak{F} = \mathcal{O}_X$, X plat sur S , et que le sous-préschéma fermé Y_0 de X_0 qui correspond à $\mathcal{G}_0$ soit localement une intersection complète. Alors l'espace tangent de Zariski à Q_S en x est canoniquement isomorphe à $H^0(Y_0 , \check{\mathcal{N}}_{X_0/Y_0})$. Si $H^1(Y_0 , \check{\mathcal{N}}_{X_0/Y_0}) = 0$, alors le préschéma de Hilbert X est simple sur S en le point x . ($\check{\mathcal{N}}_{X_0/Y_0}$ est le faiseceau normal à Y_0 dans X_0).

REMARQUE 5.5. - Cet énoncé s'applique en particulier lorsque Y_0 est une intersection complète dans X_0 définie par une équation, i. e. est un "diviseur de Cartier" positif. Alors $\check{\mathcal{N}}_{X_0/Y_0}$ est isomorphe au faisceau sur Y_0 induit par le faisceau inversible $\mathcal{J}^{-1}$ sur X_0 défini par le diviseur Y_0 . C'est la situation rencontrée en particulier dans l'étude des familles de diviseurs positifs sur une variété projective non singulière X_0 . L'isomorphisme entre l'espace tangent de Zariski en le point x de Q (ou si on préfère, de l'ouvert D de Q qui correspond aux diviseurs) et $\mathcal{H}^0(Y_0 , \check{\mathcal{N}}_{X_0/Y_0})$ était connu en géométrie algébrique classique sous le nom de "homomorphisme caractéristique" du premier dans le second. Il n'était défini que lorsque x était un point simple de la variété des paramètres T d'une "famille continue complète" de diviseurs, c'est-à-dire, de notre point de vue, une composante irréductible du schéma D , muni de la structure réduite induite. L'espace tangent à T en x est alors un sous-espace de l'espace tangent à D en x , donc l'homomorphisme caractéristique des anciens est bien injectif, mais n'est surjectif que sous des conditions supplémentaires, par exemple si D est intègre en x . En fait, ZAPPA [8] a construit un exemple (avec X surface projective non singulière sur le corps des complexes) ou même en le point générique de T, l'homomorphisme caractéristique n'est pas surjectif. Cela signifie donc que D n'est pas intègre même en le point générique de la composante irréductible envisagée. Cela montre de façon particulièrement frappante comment les variétés à éléments nilpotents sont nécessaires pour comprendre des phénomènes de la plus classique théorie des surfaces.

5.6. - On a donné dans (5.4) un critère de simplicité, s'appliquant en particulier aux schémas de diviseurs. KODAIRA à donné dans [6] un critère différent, savoir la nullité de $H^1(X_0, \mathcal{L})$, où $\mathcal{L} = \mathcal{J}_0^{-1}$ est le faisceau inversible sur X_0 défini par le diviseur Y_0 ; critère valable lorsque S est le spectre d'un corps de caractéristique 0, et prouvé dans [6] par voie transcendante dans le cas où le corps de base est $\mathbb{C}$. Notons ici que, de façon générale, S étant à nouveau quelconque, la condition de Kodaira est une condition suffisante pour que le morphisme canonique $D \to \underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ du préschéma des diviseurs dans le préschéma de Picard de X/S soit simple au point x envisagé (comme on le vérifie facilement par le critère habituel de simplicité, une fois acquise l'existence de $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$). Si donc, de plus, $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ est simple sur S au point image de x (par exemple si $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ est simple sur S), alors D est simple sur S en x. D'autre part, CARTIER a démontré que tout préschéma en groupes localement de type fini sur un corps k de caractéristique 0 est simple sur k. En conjuguant ces deux résultats, on retrouve le résultat de KODAIRA. On notera qu'il résulte de ces remarques que sur un corps K de caractéristique $p > 0$, lorsque $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ n'est pas simple sur k (ce qui est le cas lorsque X est la surface de Igusa), la condition $H^1(X_0, \mathcal{L}) = 0$ implique au contraire que D n'est pas simple en x, et même n'est pas réduit en x si K est algébriquement clos.

Pour finir, signalons encore le résultat suivant, qui joue un rôle important dans l'étude différentielle des espaces fibrés :

PROPOSITION 5.7. - Soient X un préschéma fini et plat sur S localement noethérien, et soit Z un préschéma sur S, tel que $\prod_{X/S}(Z/X)$ existe (ce qui est le cas si Z est quasi-projectif sur X). Si alors Z est simple sur X, $\prod_{X/S}(Z/X)$ est simple sur S.

C'est une conséquence immédiate de la définition, et du critère habituel de simplicité ([3], III, 3.1). Remarquons que lorsque X est fini et plat sur S, la question de l'existence de $\prod_{X/S}(Z/K)$ peut se traiter très élémentairement, sans utiliser la théorie des schémas de Hilbert. On trouve par exemple que si X est radiciel sur S, alors $\prod_{X/S}(Z/X)$ existe sans aucune restriction sur Z. Par exemple, soit T un S-préschéma, et soit T_n le "voisinage infinitésimal d'ordre n" de la diagonale de $T \times_S T$ dans $T \times_S T$, muni des morphismes p_1, p_2 : $T_n \to T$ induits par les deux projections. On considère T_n comme un préschéma fini sur T grâce à p_1, supposons-le de plus plat sur T (ce qui est le cas si T est simple sur S). Pour tout préschéma X sur T, posons

$$(X/T/S)^{(n)} = \prod_{T_n/S} (p_2^*(X/T)/T_n) \quad ,$$

c'est un préschéma sur T appelé fibré des germes de sections d'ordre n de X sur T (relativement à S). Il dépend fonctoriellement de X, et est simple sur T si X l'est.

6. Relations avec la notion de norme et les produits symétriques.

Soient S un préschéma, X et Y des S-préschémas,

$$u : (X/S)^n \to Y$$

un S-morphisme symétrique de la puissance cartésienne n-ième de X/S dans Y. Nous supposerons pour simplifier S localement noethérien, et X et Y de type fini sur S. On peut alors, à tout Module cohérent $\mathcal{F}$ sur X, à support fini sur S, plat sur S et de rang relatif sur S égal à n (i. e. tel que $f_*(\mathcal{F})$ soit un Module localement libre de rang n sur S), faire correspondre de façon naturelle une section de Y sur S :

$$\pi^u_{X/S}(\mathcal{F}) \in \Gamma(Y/S) \quad .$$

Nous ne donnerons pas ici la définition en forme, nous contentant de signaler que le formalisme auquel on arrive est une généralisation naturelle du formalisme habituel des normes et traces. Lorsque la puissance symétrique n-ième de X sur S existe (par exemple lorsque les orbites du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ opérant sur $(X/S)^n$ sont contenues dans des ouverts affines), on peut prendre pour Y cette puissance symétrique $\mathrm{Symm}^n_S(X)$, et on trouve un élément canonique

$$\pi_{X/S}(\mathcal{F}) \in \Gamma(\mathrm{Symm}^n_S(X)/S) \quad ,$$

qui permet de retrouver les $\mathfrak{N}^u_{X/S}(F)$. Un autre cas important est celui où X est un monoïde commutatif sur S , et $X = Y$, le morphisme u provenant de la loi de composition de X . On écrira alors simplement $\mathfrak{N}(\mathcal{F})$ pour la section de X sur S associée au Module $\mathcal{F}$ sur X .

Supposons maintenant que l'on ait un Module cohérent $\mathcal{F}$ sur X , tel que $\underline{\mathrm{Quot}}_{\mathcal{F}/X/S}$ existe, ou du moins tel que le foncteur $\mathrm{Quot}^n_{\mathcal{F}/X/S}$ qui associe à tout S' sur S l'ensemble des faisceaux quotients cohérents $\mathcal{M}$ de $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S'}$ qui sont plats sur S et de rang relatif n , soit représentable par un S-préschéma $\underline{\mathrm{Quot}}^n_{\mathcal{F}/X/S}$ (Lorsque X est quasi-projectif sur S , alors $\underline{\mathrm{Quot}}^n_{\mathcal{F}/X/S}$ existe bien, et n'est autre, avec les notations du numéro 3, que $\underline{\mathrm{Quot}}^P_{\mathcal{F}/X/S}$, où P est le polynôme réduit au terme constant n). Comme la formation des $\mathfrak{N}^u_{X/S}(\mathcal{M})$ est compatible avec le changement de base, on obtient alors un morphisme canonique

$$\mathfrak{N}^u_{X/S} : \underline{\mathrm{Quot}}^n_{\mathcal{F}/X/S} \to Y \quad ,$$

en particulier, si la puissance symétrique n-ième de X sur S existe :

$$\mathfrak{N}_{X/S} : \underline{\mathrm{Quot}}^n_{\mathcal{F}/X/S} \to \mathrm{Symm}^n_S(X) \quad .$$

Le cas le plus important est celui où $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$, qui donne un morphisme :

$$\mathfrak{N}_{X/S} : \underline{\mathrm{Hilb}}^n_{X/S} \to \mathrm{Symm}^n_S(X) \quad .$$

C'est évidemment un isomorphisme pour $n = 0$ ou $n = 1$. Mais pour $n \geq 1$, même si S est le spectre d'un corps k , et lorsque X est simple sur S , ce n'est pas en général un isomorphisme ni même un morphisme injectif, puisque un sous-schéma de dimension 0 de X (correspondant par exemple à un idéal $\mathfrak{i}$ primaire pour l'idéal maximal dans un anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$, pour un point fermé x de X) n'est pas connu quand on connait le cycle qu'il définit (en l'occurence, quand on connait la codimension sur k de $\mathfrak{i}$ dans $\mathcal{O}_{X,x}$). On peut seulement dire ceci (S étant de nouveau quelconque) :

a. Si X est simple sur S , alors le morphisme-norme définit un isomorphisme de l'ouvert de $\underline{\mathrm{Hilb}}^n_{X/S}$ qui correspond à la classification de revêtements étales de rang n contenus dans X (cf. n° 4, (b)), avec l'ouvert de $\mathrm{Symm}^n_S(X)$ qui correspond aux n-cycles sans composantes multiples.

b. Si de plus X est de dimension relative 1 sur S, alors le morphisme norme définit même un isomorphisme de $\underline{\mathrm{Hilb}}^n_{X/S}$ avec $\mathrm{Symm}^n_{X/S}$.

Ce dernier fait est dû à ce que un sous-schéma de dimension 0 d'une courbe algébrique non singulière est connue quand on connait le cycle correspondant. La même remarque s'applique d'ailleurs plus généralement aux diviseurs de Cartier, positifs sur un schéma algébrique non singulier (et il n'est pas exclu que dans ce cas très particulier, la variété de Chow donne la même chose que le schéma de Hilbert).

7. Compléments et questions.

Comme l'a remarqué J.-P. SERRE, il résulte d'un exemple bien connu de NAGATA qu'on peut trouver un schéma S, spectre d'un corps k, un S-schéma S', spectre d'une extension quadratique k' de k, enfin un S'-schéma X propre et simple (mais non projectif) de dimension 3, tel que $\prod_{S'/S}(X/S)$ n'existe pas. Cela implique a fortiori que le schéma de Hilbert $\underline{\mathrm{Hilb}}^2_{X/S}$ n'existe pas (ni même le k-schéma qui représenterait les revêtements étales de rang 2 de S contenus dans X, ni a fortiori le carré symétrique de X, cf. numéro précédent). Cela impose donc des limitations sérieuses aux possibilités de constructions non projectives en Géométrie algébrique. (Il est cependant plausible que de telles limitations ne se présenteront pas en Géométrie analytique, pas plus qu'elles ne se présentent en Géométrie formelle, (cf. [2], II)). Par contre, si X est un schéma propre sur le spectre S d'un corps k, et si Z est quasi-projectif sur X, alors $\prod_{X/S}(Z/X)$ existe, et est un schéma, somme d'une suite de schémas quasi-projectifs sur S (comme dans le cas projectif (3.1)). Pour le voir, on se ramène en effet au cas où X est lui-même projectif, en dominant X par un S-schéma projectif X' ; nous ne donnerons pas ici le détail de la démonstration, qui utilise aussi le résultat de factorisation d'un morphisme fini signalé dans [2], I, A, n° 2 (b). Le succès de la méthode tient au fait que, S étant le spectre d'un corps, le X' qui intervient dans le lemme de Chow sera automatiquement plat sur S. J'ignore si le résultat reste valable sans hypothèse sur S, en supposant seulement X propre et plat sur S, Z quasi-projectif sur X. Un cas important dans les applications est celui où Z est un sous-schéma fermé de X ; si alors $\prod_{X/S}(Z/X)$ existe, c'est nécessairement un sous-schéma fermé de S. On peut le construire directement de façon assez simple lorsque X est projectif sur S, sans utiliser la théorie des schémas de Hilbert, et la méthode employée montre plus généralement que si Z est affine sur X, alors $\prod_{X/S}(Z/X)$ existe et est affine sur S. Elle montre également que si X est propre et plat sur S (pas nécessairement projectif sur S), alors pour tout fibré vectoriel Z localement trivial sur X, $\prod_{X/S}(Z/X)$ existe, et est un fibré vectoriel sur S. Il serait désirable que ces résultats soient repris et unifiés.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOREL (A.) et SERRE (J.-P.). - Le théorème de Riemann-Roch, Bull. Soc. math. France, t. 86, 1958, p. 97-136.

[2] GROTHENDIECK (Alexander). - Technique de construction et théorèmes d'existence en géométrie algébrique, I., II., III., Séminaire Bourbaki, t. 13, 1959/60, n° 190, 29 p., n° 195, 22 p. ; et t. 14, 1960/61, n° 212, 20 p.

[3] GROTHENDIECK (Alexander). - Séminaire de Géométrie algébrique, I., II., III., IV. - Paris, Institut des hautes Études scientifiques, 1960/61 (multigraphié).

[4] GROTHENDIECK (Alexander). - Technique de construction en géométrie analytique, IV., V., Séminaire Cartan, t. 13, 1960/61, n° 11 et 12.

[5] GROTHENDIECK (A.) et DIEUDONNÉ (J.). - Éléments de géométrie algébrique, I : Le langage des schémas. - Paris, Presses universitaires de France, 1960 (Institut des hautes Études scientifiques, Publications mathématiques, 4) ; II., III., IV. (à paraître).

[6] KODAIRA (K.). - Characteristic linear systems of complete continous systems, Amer. J. of Math., t. 78, 1956, p. 716-744.

[7] SERRE (Jean-Pierre). - Exemples de variétés projectives en caractéristique p non relevables en caractéristique 0, Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A., t. 47, 1961, p. 108-109.

[8] ZAPPA (G.). - Sull'esistenza, sopra la superficie algebriche, di sistemi continui completi infiniti, la cui curva e a serie caratteristica incompleta, Pont. Acad. Sc. Acta, t. 9, 1945, p. 91-93.

ADDITIF

[ajouté à la correction des épreuves]

Il apparaît maintenant que les conjectures de [2], III, n° 8, sont fausses, même pour des variétés non singulières sur un corps de caractéristique 0, tant en ce qui concerne l'existence que la quasi-projectivité du quotient, et même lorsque $\mathcal{G}$ opère avec un graphe fermé.

TECHNIQUE DE DESCENTE ET THÉORÈMES D'EXISTENCE EN GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE
V. LES SCHÉMAS DE PICARD : THÉORÈMES D'EXISTENCE

par Alexander GROTHENDIECK

1. Groupes et foncteurs de Picard relatifs.

Pour tout préschéma (plus généralement, tout espace annelé) X , nous appelons groupe de Picard (absolu) de X , et notons $\mathrm{Pic}(X)$, le groupe des classes, à un isomorphisme près, de Modules inversibles (i. e. localement isomorphes à $\mathcal{O}_X$) sur X . On a donc un isomorphisme canonique

$$(1.1) \qquad \mathrm{Pic}(X) \xrightarrow{\sim} H^1(X , \mathcal{O}_X^*) \quad ,$$

où $\mathcal{O}_X^*$ désigne le faisceau des unités de $\mathcal{O}_X$, (qui s'identifie en effet au faisceau des automorphismes du Module inversible type $\mathcal{O}_X$). Notons que $X \rightsquigarrow \mathrm{Pic}(X)$ est un foncteur contravariant en X de façon évidente, et que l'isomorphisme (1.1) est fonctoriel.

Si X est un préschéma au-dessus d'un autre S , alors pour un S' variable dans la catégorie $(\underline{\mathrm{Sch}})_{/S}$ des préschémas sur S , on a un foncteur contravariant $S' \rightsquigarrow \mathrm{Pic}(X \times_S S')$ grâce à ce qui précède. Ce foncteur n'a aucune chance d'être "représentable" ([4], II, A), car par suite de l'existence d'automorphismes non triviaux des Modules inversibles qu'on se propose de classifier, ce foncteur n'est pas de "nature locale" ([5], IV, 5.4). Il y a donc lieu de le "rendre local", en introduisant de façon générale, pour tout préschéma relatif X/S , un groupe de nature relative,

$$(1.2) \qquad \mathrm{Pic}'(X/S) = H^0(S , R^1 f_*(\mathcal{O}_X^*)) \quad ,$$

(où $f : X \to S$ est le morphisme structural) (comparer [4], II, C 3). Dans loco citato, ce groupe est appelé groupe de Picard relatif, il sera préférable ici de l'appeler groupe de Picard relatif restreint de X/S , pour des raisons qui vont apparaître. Lorsque S' varie dans $(\underline{\mathrm{Sch}})_{/S}$, $S' \rightsquigarrow \mathrm{Pic}'(X \times_S S'/S')$ est un foncteur contravariant en S' , noté aussi $\underline{\mathrm{Pic}}'_{X/S}$, donc défini essentiellement par la formule

$$(1.3) \qquad \underline{\mathrm{Pic}}'_{X/S}(S') = \mathrm{Pic}(X \times_S S'/S') \quad .$$

Ce foncteur est maintenant "de nature locale", vu qu'on a fait ce qu'il fallait pour cela. Intuitivement, le deuxième membre de (1.3) s'interprète comme l'ensemble des "familles algébriques" de classes de faisceaux inversibles sur (les fibres de) X/S, indexées par le préschéma de paramètres S'/S. Lorsque le foncteur $\underline{\mathrm{Pic}}'$ est représentable, le préschéma sur S qui le représente est noté $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$, et appelé le <u>préschéma de Picard</u> de X sur S, donc, on aura alors

$$\mathrm{Hom}_S(S', \underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}) \simeq \underline{\mathrm{Pic}}'_{X/S}(S') = \mathrm{Pic}'(X \times_S S'/S') \quad . \tag{1.4}$$

Il y a cependant des cas importants où $\underline{\mathrm{Pic}}'_{X/S}$ n'est pas représentable (exemple : variété de "Brauer-Severi" sur un corps k, sans point rationnel sur k), et où cependant il existe une définition naturelle d'un préschéma de Picard relatif. Cela tient au fait que dans la définition du foncteur $\underline{\mathrm{Pic}}'$ à partir des groupes de Picard absolus $\mathrm{Pic}(X \times_S S'/S')$, on n'a pas encore assez localisé, de façon précise $\underline{\mathrm{Pic}}'$ n'est en général pas "compatible avec la descente fidèlement plate". Explicitons.

Soit $(\mathfrak{M})$ l'ensemble des morphismes de préschémas qui sont <u>fidèlement plats et quasi-compacts</u>, cet ensemble est stable par changement de base et par composition. Soit P un foncteur contravariant de $\underline{(\mathrm{Sch})}_{/S}$ dans la catégorie des ensembles, et pour tout S-morphisme $u : T' \to T$, $u \in (\mathfrak{M})$, considérons la diagramme

$$P(T) \to P(T') \rightrightarrows P(T' \times_T T') \tag{1.5}$$

transformé par P du diagramme

$$T \leftarrow T' \xleftarrow[\quad]{pr_1 \,,\, pr_2} T' \times_T T' \quad .$$

Si P est représentable, il résulte de la théorie de la descente ([4], I, B, th. 2) que le diagramme (1.5) est exact pour tout $u \in (\mathfrak{M})$. On exprime ce fait en disant que P est compatible avec $(\mathfrak{M})$, en l'occurence que P est "compatible avec la descente fidèlement plate", ou encore que le "<u>préfaisceau</u>" P sur $\underline{(\mathrm{Sch})}_{/S}$ est un "<u>faisceau</u>" pour la notion de localisation fournie par l'ensemble $(\mathfrak{M})$. Lorsque P est quelconque, un procédé standard, bien connu dans le cas de la localisation topologique habituelle, permet de lui associer un "faisceau" $\mathcal{P}$ et un homomorphisme de foncteurs $P \to \mathcal{P}$, qui soit universel dans un sens évident. Le calcul de $\mathcal{P}$ peut s'expliciter de la façon suivante : pour définir $\mathcal{P}(T)$, on désigne, pour tout T' sur T tel que le morphisme $u : T' \to T \in (\mathfrak{M})$, par

$\overline{H}^{\circ}(T'/T , P)$ le sous-ensemble de $P(T')$ formé des éléments ξ dont les deux images ξ_1, ξ_2 dans $P(T' \times_T T')$ sont telles qu'il existe un morphisme $v : T'' \to T' \times_T T'$, $v \in (\mathfrak{M})$, tel que ξ_1 et ξ_2 aient même image dans $P(T'')$.

[N. B. - L'ensemble $\overline{H}^{\circ}$ ainsi défini est donc plus grand que l'ensemble $H^{\circ}(T'/T , P)$ introduit dans [4], I, A, 4 (a).] Lorsque T' varie sur T fixé, (toujours avec $u \in (\mathfrak{M})$) les $\overline{H}^{\circ}(T'/T , P)$ forment un système inductif (quand l'ensemble des T' est muni du préordre défini par la domination), et on pose

$$(1.6) \qquad \mathcal{P}(T) = \varinjlim_{T'} \overline{H}^{\circ}(T'/T , P) \quad .$$

La loi fonctorielle en T de cette expression s'explicite de façon évidente.

Lorsque

$$P(T) = \mathrm{Pic}(X \times_S T) \quad ,$$

le foncteur contravariant sur $(\underline{\mathrm{Sch}})_{/S}$ défini par (1.6) est appelé <u>foncteur de Picard relatif</u> de X sur S, et noté $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$, et on appelle <u>groupe de Picard relatif</u> de X sur S, et on note $\mathrm{Pic}(X/S)$, le groupe $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}(S)$. On trouve alors une bijection évidente

$$(1.7) \qquad \underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}(T) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}(X \times_S T/T) \quad ,$$

Un élément de $\mathrm{Pic}(X/S)$ est donc défini à l'aide d'un élément ξ' d'un groupe $\mathrm{Pic}(X \times_S S')$ (où $S' \to S$ est fidèlement plat et quasi-compact), tel que l'on puisse trouver un morphisme fidèlement plat et quasi-compact $S'' \to S' \times_S S'$ tel que les deux images inverses de ξ' dans $\mathrm{Pic}(X \times_S S'')$ soient les mêmes. Un élément ξ' de $\mathrm{Pic}(X \times_S S')$ et ξ_1 de $\mathrm{Pic}(X \times_S S_1)$ (satisfaisant les conditions qu'on vient d'expliciter), définissent le même élément de $\mathrm{Pic}(X/S)$, si et seulement s'il existe un morphisme fidèlement plat et quasi-compact $S_1' \to S' \times_S S_1$ tel que les images des deux éléments en question dans $\mathrm{Pic}(X \times_S S_1')$ soient égales. Il est souvent commode de travailler encore avec le foncteur $P' = \underline{\mathrm{Pic}}'_{X/S}$ introduit plus haut, on constate aussitôt que le morphisme canonique $P \to P'$ définit un <u>isomorphisme</u>

$$(1.8) \qquad \mathcal{P} \xrightarrow{\sim} \mathcal{P}' \quad ,$$

ce qui donne une description de $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ en termes de $\underline{\mathrm{Pic}}'_{X/S} = P'$, plus commode souvent. En vertu de 2.3 ci-dessous, lorsque dans la description de $\mathrm{Pic}(X/S)$ qu'on vient d'expliciter, on remplace P par P', on peut en effet faire $S'' = S' \times_S S'$, $S'_1 = S' \times_S S_1$, du moins sous les conditions explicitées dans loco citato.

Lorsque le foncteur $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ est représentable, on dit que X/S admet un préschéma de Picard, et le préschéma sur S représentant le foncteur est appelé <u>préschéma de Picard</u> de X sur S , et noté encore $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$. Il suffit évidemment pour ceci que $P' = \underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ soit représentable, car alors P' est déjà un "faisceau", et la formule (1.8) prouve que le morphisme $P' \to \mathcal{P}'$ s'identifie au morphisme canonique

$$\underline{\mathrm{Pic}}'_{X/S} \to \underline{\mathrm{Pic}}_{X/S} \quad , \tag{1.9}$$

qui est alors un isomorphisme. Donc notre terminologie est compatible avec celle introduite plus haut avec (1.4). En général, lorsque $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ existe, il est défini par l'isomorphisme fonctoriel :

$$\mathrm{Hom}_S(S' , \underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}(X \times_S S'/S') \quad . \tag{1.10}$$

2. <u>Relations entre les divers groupes de Picard relatifs et absolus.</u>

PROPOSITION 2.1. - Soit $f : X \to S$ un morphisme tel que $\mathcal{O}_S \xrightarrow{\sim} f_*(\mathcal{O}_X)$. Alors on a une suite exacte

$$0 \to \mathrm{Pic}(S) \to \mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}'(X/S) \quad .$$

Lorsque X admet une section sur S , le dernier morphisme est surjectif, i. e. on a un isomorphisme

$$\mathrm{Pic}'(X/S) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}(X)/\mathrm{Pic}(S) \quad .$$

La suite exacte peut être considérée comme la suite exacte en bas degrés correspondant à la suite spectrale de Leray pour f et $\mathcal{O}_X$. La deuxième assertion également est formelle.

PROPOSITION 2.2. - Soit $f : X \to S$ un morphisme quasi-compact et séparé tel que $\mathcal{O}_S \xrightarrow{\sim} f_*(\mathcal{O}_X)$, et soit $S' \to S$ un morphisme fidèlement plat et quasi-compact. Alors

(i) $\mathrm{Pic}'(X/S) \to \mathrm{Pic}'(X \times_S S'/S')$ est injectif ;

(ii) Si X admet une section localement sur S (i. e. tout $s \in S$ a un voisinage ouvert U tel que $X|U$ ait une section sur U), alors le diagramme

$$\mathrm{Pic}'(X/S) \to \mathrm{Pic}'(X \times_S S'/S') \rightrightarrows \mathrm{Pic}'(X \times_S S''/S'')$$

(où $S'' = S' \times_S S'$) est exact.

Le premier énoncé résulte, grâce aux propriétés élémentaires de la descente fidèlement plate, de la remarque générale suivante. Si $f : X \to S$ est un morphisme tel que $\mathcal{O}_S \xrightarrow{\sim} f_*(\mathcal{O}_X)$, alors le foncteur $\mathcal{F} \rightsquigarrow f^*(\mathcal{F})$, de la catégorie des Modules localement libres de type fini sur S dans la catégorie des Modules localement libres de type fini sur X , est pleinement fidèle, et l'image essentielle est formée des Modules $\mathcal{G}$ sur X tels que $f_*(\mathcal{G})$ soit localement libre, et que l'homomorphisme canonique

$$f^*(f_*(\mathcal{G})) \to \mathcal{G}$$

soit un isomorphisme. Le deuxième énoncé a été prouvé par la théorie de la descente dans [4], I, B, 4.

Les résultats de 2.2 s'énoncent aussi ainsi :

COROLLAIRE 2.3. - Sous les conditions de 2.2, l'homomorphisme canonique (1.9) $\underset{\sim}{\mathrm{Pic}}'_{X/S} \to \underset{\sim}{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ est injectif, et même bijectif si X admet une section localement sur S . (Donc dans ce dernier cas, il y a identité entre le groupe de Picard relatif $\mathrm{Pic}(X/S)$ et le groupe de Picard relatif restreint $\mathrm{Pic}'(X/S)$.)

Conjuguant avec 2.1, on trouve donc :

COROLLAIRE 2.4. - Sous les conditions de 2.2, on a une suite exacte

$$0 \to \mathrm{Pic}(S) \to \mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(X/S) \quad .$$

Lorsque X admet une section sur S , le dernier homomorphisme est surjectif, i. e. on a alors un isomorphisme

$$\mathrm{Pic}(X/S) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}(X)/\mathrm{Pic}(S) \quad .$$

<u>Remarque</u> 2.5. - Soit $f : X \to S$ un morphisme tel que $\mathcal{O}_S \xrightarrow{\sim} f_*(\mathcal{O}_X)$, et soit g une section de X sur S . Soit $\mathcal{L}$ un Module inversible sur X , appelons <u>g-rigidification</u> de $\mathcal{L}$ un isomorphisme $\mathcal{O}_S \xrightarrow{\sim} g^*(\mathcal{L})$, et appelons <u>Module inversible g-rigidifié</u> un Module inversible $\mathcal{L}$ sur X muni d'une g-rigidification. Tout automorphisme d'une telle structure est trivial, et $\mathrm{Pic}'(X/S)$ s'identifie à l'ensemble des classes, à un isomorphisme près, de Modules inversibles g-rigidifiés sur S . (C'est ce fait qui a permis d'utiliser la théorie de la descente pour prouver 2.2, (ii).) Cela donne une nouvelle interprétation de $\mathrm{Pic}(X/S)$, du moins lorsque f est de plus quasi-compact et séparé, donc $\mathrm{Pic}(X/S) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}'(X/S)$ par 2.3.

Remarque 2.6. - Soit $f : X \to S$ un morphisme comme dans 2.2, et soit $S' \to S$ un morphisme fidèlement plat et quasi-compact tel qu'il existe un S-morphisme $S' \to X$, i. e. tel qu'il existe une section de $X' = X \times_S S'$ sur S'. Soit $S'' = S' \times_S S'$, $X'' = X \times_S S''$, et considérons la suite exacte

$$\mathrm{Pic}(X/S) \to \mathrm{Pic}(X'/S') \rightrightarrows \mathrm{Pic}(X''/S'') \quad .$$

Appliquant 2.4, on trouve une suite exacte.

$$\mathrm{Pic}(X/S) \to \mathrm{Pic}(X')/\mathrm{Pic}(S') \rightrightarrows \mathrm{Pic}(X'')/\mathrm{Pic}(S'') \quad ,$$

en particulier, tout élément du groupe de Picard relatif "provient" déjà d'un élément de $\mathrm{Pic}(X')$. Cela donne donc une simplification substantielle pour la description du groupe de Picard relatif donnée dans le numéro précédent, et de même pour le foncteur de Picard de X sur S, puisque, pour tout T sur S, on peut appliquer ce qui précède à $X \times_S T/T$ et au morphisme $T' = S' \times_S T \to T$. Si par exemple f lui-même est fidèlement plat, on peut prendre $S' = X$, ce qui permet, lorsque f est de plus de type fini (resp. simple, etc.) de se borner, dans la description du foncteur de Picard relatif $T \rightsquigarrow \mathrm{Pic}(X \times_S T/T)$, à des changements de base $T' \to T$ qui sont de type fini (resp. simple, etc.). Lorsque f est projectif et plat, S localement noethérien, on prouve qu'on peut prendre ci-dessus un $S' \to S$ tel que S' soit somme directe de revêtements plats S'_i d'ouverts S_i de S couvrant S ; si f est même séparable, on peut prendre S'_i étale sur S_i.

3. Le théorème principal d'existence : énoncé.

On ne dispose pas, même à titre conjectural, d'un énoncé d'existence de préschémas de Picard, englobant tous les cas connus. Une condition "pratiquement nécessaire", si on peut dire, est que $f : X \to S$ soit propre (assurant des propriétés de finitude essentielles) et plat. Ces conditions ne sont pas suffisantes, même si S est le spectre de l'algèbre des nombres duaux $k[t]/(t^2)$ sur un corps k (disons le corps $\underset{\sim}{C}$ des nombres complexes), et X de dimension 1. Au moment d'écrire le présent exposé, les théorèmes d'existence les plus importants pour le préschéma de Picard sont déduits du théorème suivant :

THÉORÈME 3.1. - Soit $f : X \to S$ un morphisme de préschémas localement noethériens. On suppose

(i) f projectif

(ii) f plat

(iii) les fibres géométriques de f sont intègres.

Sous ces conditions, $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ existe.

La démonstration, qui sera esquissée dans les deux numéros qui suivent, montrera en même temps ceci : Soit ξ la section de $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ correspondant à un faisceau très ample $\mathcal{O}_X(1)$ sur X/S (i. e. induit par une immersion projective $X \to P(\mathcal{E})$) ; il existe alors une partie ouverte U de $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$, réunion disjointe de parties ouvertes quasi-projectives sur S, telle que U soit stable par la translation par ξ, et que $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ soit réunion croissante des ouverts $U - n\xi$ (tous isomorphes à U). Il en résulte en particulier que sous les conditions de 3.1, $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ est séparé sur S.

Remarque 3.2. - On voit sur des exemples (avec S le spectre d'un anneau de valuation discrète, et X de dimension relative 1 sur S, par exemple), que si dans 3.1 on omet l'hypothèse (iii) en la remplaçant par l'hypothèse plus faible que, pour tout $s \in S$, l'homomorphisme $k(s) \to H^0(X_s, \mathcal{O}_{X_s})$ est un isomorphisme, alors $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ n'est pas nécessairement séparé sur S ; tant dans le cas où les fibres géométriques de f sont réduites, mais où une fibre géométrique générique intègre "éclate" par spécialisation en deux composantes irréductibles, que dans le cas où les fibres géométriques de f sont irréductibles, mais où une fibre géométrique générique intègre se spécialise en une "fibre multiple". Le premier cas se présente par exemple avec une conique dégénérant en deux droites concourrantes, un exemple du deuxième m'a été fourni par D. MUMFORD, avec une courbe elliptique dégénérant en une courbe elliptique double. Ces exemples sont valables en toute caractéristique.

Remarque 3.3. - Sous les conditions de 3.1, j'ignore si $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ est réunion disjointe d'ouverts qui sont de type fini, donc quasi-projectifs, sur S. On notera que la considération des polynômes de Hilbert $Q \in \underline{\mathbb{Q}}[t]$ permet, comme dans le cas des schémas de Hilbert ([4], IV), de donner une décomposition de $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ en somme disjointe d'ouverts $\underline{\mathrm{Pic}}^Q_{X/S}$, et il semble plausible que ces derniers sont quasi-projectifs sur S ; c'est ce qu'on verra du moins dans le prochain exposé lorsque f est un morphisme simple. On fera attention que si on remplace l'hypothèse (i) par l'hypothèse : X est projectif localement au-dessus de S (ce qui est suffisant pour la validité de 3.1, puisque la question d'existence de $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ est visiblement locale sur S), il est facile par contre de donner des exemples où $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ <u>contient des composantes connexes qui ne sont pas de type fini sur</u> S . Soit par exemple X_o une variété algébrique non singulière projective sur un corps k algébriquement clos, munie d'un automorphisme u et d'un élément ξ dans le groupe de Néron-Severi de X_o , tels que les $u^n(\xi)$ soient deux à deux distincts. On peut par exemple prendre pour X_o le produit d'une courbe elliptique E par elle-même, pour u l'automorphisme $(x , y) \rightsquigarrow (x , y + x)$ de $E \times E$. Soit S la réunion de deux courbes irréductibles non singulières se coupant en deux points a et b . Il y a sur S un revêtement principal connexe P de groupe $\underset{\sim}{Z}$, et utilisant les opérations de $\underset{\sim}{Z}$ sur X_o définies par u , on en conclut un fibré associé sur S , de fibré X_o (trivial sur S - a et S - b), en fait un schéma <u>abélien</u> sur S dans le cas particulier envisagé. On voit facilement que $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$, qui est aussi le fibré associé à P et aux opérations de $\underset{\sim}{Z}$ sur $\underline{\mathrm{Pic}}_{X_o/k}$ via u , contient une composante connexe isomorphe à $P \times \underline{\mathrm{Pic}}^o_{X_o/k}$ (où $\underline{\mathrm{Pic}}^o$ dénote la composante connexe de l'élément neutre dans $\underline{\mathrm{Pic}}$), laquelle n'est pas de type fini sur S . [Il se produit également des phénomènes analogues dans divers cas de préschémas de Picard non séparés sur S , comme envisagés dans 3.3.]

4. Diviseurs de Cartier relatifs et fibrés projectifs.

Nous n'aurons à utiliser que des diviseurs positifs, et omettrons ce qualificatif supplémentaire dans la suite du numéro.

Soit X un préschéma. Un <u>diviseur de Cartier</u> sur X , ou simplement diviseur sur X pour simplifier, est un sous-préschéma fermé D de X , défini par un Idéal $\mathfrak{J}$ qui est un Module <u>inversible</u>, i. e. engendré localement par une section <u>non diviseur de zéro</u> de $\mathcal{O}_X$. À D nous associons un Module inversible, à savoir

$$\mathfrak{L}(D) = \mathfrak{J}^{-1} \quad ,$$

et l'injection canonique $\mathfrak{J} \to \mathcal{O}_X$ donne un homomorphisme canonique

$$s_D : \mathcal{O}_X \to \mathfrak{J}^{-1} = \mathfrak{L}(D) \; , \qquad \text{i. e.} \quad s_D \in \Gamma(X , \mathfrak{L}(D)) \quad .$$

D'ailleurs, la donnée d'un diviseur est essentiellement <u>équivalente</u> à la donnée d'un Module inversible $\mathfrak{L}$ sur X , munie d'une section s qui soit partout non diviseur de zéro, en associant inversement à un tel couple $(\mathfrak{L} , s)$ le "diviseur" de s , noté div(s) . Pour un $\mathfrak{L}$ inversible donné sur X , l'ensemble des diviseurs D définissant $\mathcal{L}$ est en correspondance biunivoque avec l'ensemble quotient $\Gamma(X, \mathcal{L})^*/\Gamma(X, \mathcal{O}_X^*)$, où $\Gamma(X, \mathcal{L})^*$ désigne la partie de $\Gamma(X, \mathcal{L})$ formée des sections qui sont partout non diviseur de zéro.

Supposons maintenant que l'on ait un morphisme localement de type fini $f : X \to S$, et supposons pour simplifier S localement noethérien. Soient $\mathfrak{J}$ un Idéal cohérent sur X, D le sous-schéma de X qu'il définit, $x \in X$, et $s = f(x)$. On montre que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\mathfrak{J}$ est inversible en x (i. e. $\mathfrak{J}_x$ engendré par un élément régulier de $\mathcal{O}_{X,x}$) et D est plat sur S en x.

(ii) X et D sont plats sur S en x, et D_s est un diviseur de Cartier sur la fibre X_s en le point x.

(iii) X est plat sur S en x, et $\mathfrak{J}_x$ est engendré par un élément f_x induisant sur X_s un germe non diviseur de zéro.

On dit alors que D est un diviseur de Cartier relatif sur X/S, (ou simplement diviseur relatif sur X/S), au point envisagé. On notera sur (i) qu'alors D est également un diviseur relatif aux points voisins de x, donc si X et D sont plats sur S, et D propre sur S, alors l'ensemble des $s \in S$ tels que D_s soit un diviseur de Cartier dans X_s (i. e. tels que D soit un diviseur de Cartier relatif aux points de X_s) est une partie ouverte de S. D'autre part, on a fait ce qu'il fallait dans la définition précédente pour que la notion de diviseur de Cartier relatif soit stable par un changement de base quelconque $S' \to S$. Considérons alors, l'ensemble $\mathrm{Div}(X/S)$ des diviseurs relatifs sur X/S, puis le foncteur contravariant en S' variable sur S défini par

$$\underline{\mathrm{Div}}_{X/S}(S') = \mathrm{Div}(X \times_S S'/S') \quad .$$

Supposons X plat et propre sur S. Alors par la caractérisation (ii) des diviseurs de Cartier relatifs, $\underline{\mathrm{Div}}_{X/S}$ peut être considéré comme un sous-foncteur du foncteur $\underline{\mathrm{Hilb}}_{X/S}$ défini dans [4], IV, et le morphisme d'inclusion

$$\underline{\mathrm{Div}}_{X/S} \to \mathrm{Hilb}_{X/S}$$

est "représentable par des immersions ouvertes", (cf. [5], IV, 3.13) en vertu des remarques qui précèdent. Utilisant le théorème d'existence principal de [4], IV, on trouve :

PROPOSITION 4.1. - Supposons $f : X \to S$ projectif et plat. Alors le foncteur $\underline{\mathrm{Div}}_{X/S}$ est représentable, et, de façon précise, est représentable par un ouvert de $\underline{\mathrm{Hilb}}_{X/S}$.

Utilisant (pour un faisceau $\mathcal{O}_X(1)$ très ample donné sur X/S) la décomposition canonique de $\underline{\mathrm{Hilb}}_{X/S}$ en somme des ouverts $\underline{\mathrm{Hilb}}^Q_{X/S}$ correspondants aux polynômes de Hilbert $Q \in \mathbb{Q}[t]$, on en conclut d'ailleurs une décomposition analogue

$$\underline{\mathrm{Div}}_{X/S} = \coprod_{Q \in \mathbb{Q}[t]} \underline{\mathrm{Div}}^Q_{X/S}$$

en somme d'ouverts disjoints quasi-projectifs sur S.

Utilisant l'application $D \rightsquigarrow \mathcal{L}(D)$, on trouve d'autre part un homomorphisme fonctoriel

$$(+) \qquad \underline{\mathrm{Div}}_{X/S} \to \underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$$

que nous nous proposons d'étudier ; il apparaîtra qu'il est relativement représentable ([5], IV, 3) sous des conditions assez générales. Partons donc avec un élément ξ de $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}(S')$, en supposant pour simplifier les notations que $S' = S$, et montrons que le sous-foncteur correspondant de $\underline{\mathrm{Div}}_{X/S}$ est représentable. Prenons d'abord le cas où ξ est défini par un Module inversible $\mathcal{L}$ sur X. Nous supposerons X propre et plat sur S, et que les fibres géométriques de X sur S sont intègres, ce qui implique aussi ([2], III, par. 7) que l'on a $\mathcal{O}_S \xrightarrow{\sim} f_*(\mathcal{O}_X)$ et que cette relation reste valable après tout changement de base $S' \to S$. Alors les diviseurs de Cartier relatifs D sur X/S tels que $\mathcal{L}(D)$ et $\mathcal{L}$ définissent le même élément de $\mathrm{Pic}(X/S) = \underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}(S)$, i. e. en vertu de 2.4, tels que $\mathcal{L}(D)$ et $\mathcal{L}$ soient isomorphes localement au-dessus de S, sont en correspondance biunivoque avec les sections du faisceau quotient $f_*(\mathcal{L})^*/\mathcal{O}_S^*$. Cette correspondance est compatible avec les changements de base. D'autre part, des considérations générales du type "Künneth" de loco citato (cf. aussi [6]) montrent que la propreté de X/S et la platitude de $\mathcal{L}$ sur S impliquent l'existence d'un Module cohérent $\mathcal{Q}$ sur S, défini à un isomorphisme unique près, et un isomorphisme de faisceaux

$$f_*(\mathcal{L}) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{Q}, \mathcal{O}_S) \qquad ,$$

la formation de $\mathcal{Q}$ étant par ailleurs compatible avec les changements de base. Ici $f_*(\mathcal{L})^*$ désigne le sous-faisceau d'ensembles de $f_*(\mathcal{L})$ dont les sections sur U sont les sections de $\mathcal{L}$ sur $f^{-1}(U)$ qui définissent des diviseurs de

Cartier relatifs sur $f^{-1}(U)/U$, i. e. qui induisent des sections non diviseurs de 0 sur les X_s $(s \in U)$. Utilisant l'hypothèse que les fibres X_s sont intègres, cela signifie simplement que les sections induites sur les fibres X_s ne sont pas identiquement nulles, ou encore en termes d'homomorphismes locaux $\mathcal{Q} \to \mathcal{O}_S$, que lesdits homomorphismes soient surjectifs (NAKAYAMA). Cela montre que l'ensemble des sections de $f_*(\mathcal{L})^*/\mathcal{O}_S^*$ est en correspondance biunivoque avec l'ensemble des Modules quotients inversibles de $\mathcal{Q}$, ou encore, par définition du fibré projectif $P(\mathcal{Q})$ associé au Module cohérent $\mathcal{Q}$ (cf. [5], V, 2), avec l'ensemble des sections de $P(\mathcal{Q})$ sur S . Cette description est compatible avec la formation des images inverses, et on obtient par suite le théorème ci-après.

THÉORÈME 4.3. - Soient $f : X \to S$ un morphisme propre et plat à fibres géométriques intègres, avec S localement noethérien, $\mathcal{L}$ un Module inversible sur X . Pour tout S' sur S , soit $T(S')$ l'ensemble des diviseurs relatifs D sur $X \times_S S'/S'$ tels que $\mathcal{L}(D)$ soit isomorphe à $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S'}$ localement au-dessus de S' (i. e. tels que $\mathcal{L}(D)$ et $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S'}$ définissent le même élément de $\mathrm{Pic}(X \times_S S'/S')$. Alors il existe un Module cohérent $\mathcal{Q}$ sur S , déterminé à un isomorphisme unique près, tel que le foncteur T soit représentable par le fibré projectif $P(\mathcal{Q})$.

COROLLAIRE 4.4. - Si on suppose même f projectif, alors l'homomorphisme fonctoriel $\underset{\sim}{\mathrm{Div}}_{X/S} \to \underset{\sim}{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ est représentable par morphismes projectifs.

En fait, lorsque X admet une section (resp. localement une section) sur S , alors l'homomorphisme précédent est représentable par des fibrés projectifs (resp. par des fibrés projectifs locaux), grâce à 4.3 et 2.1. Dans le cas où f est quasi-projectif, on se ramène facilement au cas précédent par une méthode de descente, utilisant des quasi-sections finies et plates de X localement sur S .

Remarque 4.5. - Sous les conditions de 4.3, le Module $\mathcal{Q}$ sur S n'est en général pas localement libre, ce qui s'exprime par le fait que la dimension des fibres réduites de $\mathcal{Q}$, i. e. celle des $H^0(X_s , \mathcal{L}_s)$ pour $s \in S$ variable, peut faire des sauts. Etant donné un Module cohérent $\mathcal{Q}$ sur le préschéma localement noethérien S , on vérifie facilement que pour un $s \in S$ donné, $\mathcal{Q}$ est libre en s si et seulement si $P(\mathcal{Q})$ est plat sur S en les points au-dessus de s , (auquel cas il sera donc même simple sur S en les points au-dessus de s) ; en l'occurence, $\mathcal{Q}$ étant défini en termes de $\mathcal{L}$ comme ci-dessus, cela signifie aussi que la formation de l'image directe $f_*(\mathcal{L})$ "commute avec le changement de base au voisinage de s ", ou encore que $f_*(\mathcal{L})_s \to H^0(X_s , \mathcal{L}_s)$ est surjectif. Il en sera ainsi par exemple si $H^1(X_s , \mathcal{L}_s) = 0$. Sous réserve d'existence des préschémas en jeu, ces critères s'appliquent en particulier à la situation universelle $\underline{\mathrm{Div}}_{X/S} \to \underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$, et donnent une condition nécessaire et suffisante, resp. suffisante, pour que ce morphisme soit simple en un point donné de $\underline{\mathrm{Div}}_{X/S}$.

5. Démonstration du théorème principal d'existence.

Sous les conditions de 3.1, choisissons un Module $\mathcal{O}_X(1)$ très ample sur X/S , soit ξ l'élément correspondant de $\mathrm{Pic}(X/S)$. Posons pour abréger $\underline{P}(S') = \mathrm{Pic}(X \times_S S'/S')$, et supposons d'abord pour simplifier que X/S admette une section. Soit $\underline{P}^+(S')$ la partie de $\underline{P}(S')$ formée des classes des $\mathcal{L}$ inversibles sur $X \times_S S'$ tels que

$$R^i f'_*(\mathcal{L}(n)) = 0 \quad \text{pour} \quad i > 0 \quad \text{et tout} \quad n \geqslant 0$$

$$f'_*(\mathcal{L}(n)) \neq 0 \quad \text{pour tout} \quad n \geqslant 0 \quad .$$

Ce sont là des conditions stables par changement de base, donc qui définissent un sous-foncteur $\underline{P}^+$ de $\underline{P}$, évidemment stable par translation par ξ . Utilisant les "théorèmes A et B" de SERRE ([2], III, 2) et les généralités ([5], IV, 5), on voit facilement que $\underline{P}$ est représentable si et seulement si $\underline{P}^+$ l'est, et alors $\underline{P}^+$ sera représentable par un ouvert U du préschéma $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ représentant $\underline{P}$, et ce dernier sera réunion croissante des ouverts $U - n\xi$.

Soit pour abréger $\underline{D} = \underline{\mathrm{Div}}_{X/S}$, et soit $\underline{D}^+$ l'image inverse de $\underline{P}^+$ par le morphisme canonique $\underline{D} \to \underline{P}$. Donc on a un morphisme

$$(+) \qquad \underline{D}^+ \to \underline{P}^+ \quad ,$$

et on sait déjà que $\underline{D}^+$ est représentable par un ouvert D^+ du préschéma $D = \underline{\mathrm{Div}}_{X/S}$ (dont l'existence est garantie par 4.1). Il résulte facilement de 4.3 que le morphisme (+) est représentable par morphismes simples projectifs surjectifs (et de façon précise par des fibrés projectifs associés à des Modules localement libres partout non nuls) : cela tient au fait que, lorsque $\mathcal{L}$ sur $X \times_S S'$ est, comme au début du présent numéro, alors $f'_*(\mathcal{L})$ est un Module localement libre $\neq 0$, dont la formation commute au changement de base ; avec les notations de 4.3, $\mathcal{Q}$ sera alors isomorphe au dual de $f'_*(\mathcal{L})$. Utilisant le critère général ([5], IV, 4.7), nous allons en conclure la représentabilité de P^+ . Dans loco citato, nous prendrons pour $\mathcal{G}$ l'ensemble des morphismes fidèlement plats et quasi-compacts de préschémas (qui sont bien des épimorphismes effectifs en vertu de [4], I B). La condition (a) de loco citato, à savoir que (+) est représentable par morphismes éléments de $\mathfrak{S}$, est vérifiée comme on vient de le voir ; de même la condition (b), qui signifie que le foncteur $\underset{\sim}{P}^+$ est compatible avec la descente fidèlement plate quasi-compacte, ce qui est immédiat. Reste à prouver la condition (c) de loco citato, à savoir que l'équivalence R dans le préschéma D^+ déduite du morphisme $\mathfrak{S}$-représentable (+) est $\mathfrak{S}$-effective, i. e. est effective et telle que $D^+ \to D^+/R$ soit $\in \mathfrak{S}$. Pour ceci on note d'abord que les ouverts D^{+Q} de D^+ correspondants aux divers polynômes de Hilbert virtuels $Q \in \underset{\sim}{Q}[t]$ sont stables par R (car les fibres de R sont connexes), ce qui nous ramène à montrer que pour tout Q , la relation d'équivalence R^Q induite dans D^{+Q} est $\underset{\sim}{S}$-effective. Or maintenant D^{+Q} est quasi-projectif, et d'autre part la relation d'équivalence R^Q est projective et plate. On est donc sous les conditions d'application de [4], III, 6.1, qui implique le résultat voulu.

Dans le cas général où X/S n'admet pas nécessairement de section, on se ramène facilement au cas précédent par la technique de descente, ou on reprend la démonstration précédente avec la modification qui s'impose dans la définition de $\underset{\sim}{P}^+$.

Remarques 5.1. - La méthode suivie est essentiellement celle de MATSUSAKA pour la construction projective des variétés de Picard. Le résultat invoqué de [4], III pour la possibilité de passage au quotient effectif peut se déduire facilement aussi du théorème d'existence des schémas de Hilbert, (cf. par exemple [6]) (Classiquement, ces quotients se construisaient par utilisation des coordonnées de Chow). On notera que la formation de l'ouvert $\underline{\mathrm{Pic}}^+_{X/S}$ de $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ et sa décomposition en ouverts $\underline{\mathrm{Pic}}^{+Q}_{X/S}$ quasi-projectifs sur S , suivant les polynômes de Hilbert pour les diviseurs définissant les Modules inversibles envisagés, est compatible avec le changement de base (ce qui permet l'application de la technique de descente).

Remarques 5.2. - Il n'est pas exclu que $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ existe chaque fois que $f : X \to S$ est propre et plat et tel que les homomorphismes $k(s) \to H^0(X_s , \mathcal{O}_{X_s})$ $(s \in S)$ sont des isomorphismes (cette dernière condition signifiant alors aussi que $\mathcal{O}_S \xrightarrow{\sim} f_*(\mathcal{O}_X)$ et que cette relation reste valable après tout changement de base $S' \to S$). C'est du moins ce qu'on prouve dans le cadre des espaces analytiques lorsque f est de plus projectif, par une méthode différente (celle de CHOW sauf erreur) expliquée dans [5], IX, 3.1. Dans cette méthode, le passage au quotient par une relation d'équivalence <u>propre</u> et plate dans un ouvert du schéma des diviseurs, est remplacée par un passage au quotient par le groupe projectif dans le schéma des immersions de X dans P^r_S. Cette méthode pourra probablement s'adapter au cas des schémas, en utilisant les résultats de MUMFORD sur le passage au quotient par le groupe projectif [8] ; pour l'instant, il n'y a de démonstration écrite que lorsque X a "beaucoup de sections locales" au-dessus de S, par exemple lorsque X est séparable sur un anneau local complet. En principe, la méthode en question serait de portée plus générale, puisqu'elle donne également l'existence de préschémas de Picard dans des cas où ceux-ci ne sont pas séparés, et où la première méthode échoue donc nécessairement. (Techniquement, la difficulté provient du fait que lorsque les fibres géométriques de f ne sont plus intégres, alors le foncteur envisagé dans 4.3 n'est plus représentable par le fibré projectif $P(\mathcal{Q})$ lui-même, mais par un <u>ouvert</u> dudit, ce qui conduit à la question délicate du passage au quotient par une relation d'équivalence plate mais non propre.)

<u>Remarque</u> 5.3. - On notera que la démonstration donnée ici ne fait appel, ni à la construction préalable des jacobiennes des courbes ou familles de courbes, ni à la théorie des variétés abéliennes ou schémas abéliens, et par là se distingue de façon essentielle d'exposés traditionnels comme dans le livre de LANG [7] ou l'exposé de CHEVALLEY [1], qui suivent la voie esquissée par A. WEIL. Même dans le cas des jacobiennes des courbes non singulières sur un corps algébriquement clos (le corps des complexes disons), la construction donnée ici pour la jacobienne est la seule connue qui en fournisse les propriétés très fortes que nous avons pris comme définition au numéro 1, (essentiellement celles de CHEVALLEY, mais en tenant compte de "variétés de paramètres" à éléments nilpotents). Que la construction des schémas de Picard doive précéder et non suivre la théorie des variétés abéliennes, est clair a priori par le fait qu'en général les schémas de Picard ne sont ni ne se ramènent à des schémas abéliens, comme on voit déjà dans le cas de courbes singulières sur un corps algébriquement clos, où on trouve les "jacobiennes généralisées" de Rosenlicht, qui ne sont pas des variétés abéliennes. De plus, la théorie des variétés abéliennes, et plus généralement des schémas abéliens, gagne beaucoup en simplicité une fois qu'on dispose d'une théorie des schémas de Picard en général. En particulier, la théorie de dualité pour les schémas abéliens, et notamment les résultats du type Cartier, deviennent à peu près formels à partir de là (cf. par exemple [10]).

Remarques 5.4. - Le "principe de compatibilité" de Igusa pour la jacobienne d'une courbe dégénérant en une courbe singulière, ne peut être bien compris que comme un théorème d'existence du schéma de Picard d'un schéma relatif en courbes X/S , non nécessairement simple sur S . C'est donc un cas particulier du théorème d'existence principal 3.1 lorsque la courbe spécialisée est intègre (i. e. en termes classiques, irréductible de multiplicité 1). On notera que pour l'instant, le cas d'une courbe spéciale réductible (même lorsque les composantes sont de multiplicité 1, i. e. lorsque la courbe spéciale est séparable sur le corps résiduel) échappe aux théorèmes d'existence connus, sauf dans le cas où on est sur un anneau de valuation discrète complet à corps résiduel algébriquement clos, comparer 5.2. Cette question d'existence se posera certainement à l'occasion d'une construction géométrique, en théorie des schémas, des "compactifications" de Baily-Satake des schémas modulaires des courbes de genre g . (Cette compactification est connue pour l'instant seulement pour $g = 1$, grâce aux travaux de IGUSA) .

6. Théorèmes d'existence relatifs.

Nous allons esquisser ici quelques cas utiles où l'existence de certains schémas de Picard implique l'existence de certains autres, ce qui permet de déduire du théorème principal 3.1 divers autres théorèmes d'existence.

PROPOSITION 6.1. - Soit $f : X \to S$ un morphisme plat projectif tel que dans la factorisation de Stein $f = f'' f'$, le morphisme $f' : X \to S'$ soit plat et à fibres géométriques intègres (donc satisfait aux hypothèses de 3.1), et le morphisme fini $f'' : S' \to S$ soit plat. Alors $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ existe et (avec les notations introduites dans [4], II, C 2 on a un isomorphisme canonique

$$\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S} \xrightarrow{\sim} \prod_{S'/S} \underline{\mathrm{Pic}}_{X/S'} \quad .$$

Pour le montrer, on établit d'abord un isomorphisme de foncteurs

$$\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S} \xrightarrow{\sim} \prod_{S'/S} \underline{\mathrm{Pic}}_{X/S'} \quad ,$$

on utilise 3.1, qui implique que $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S'}$ est représentable, et on utilise la structure signalée dans le n° 3 de $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S'}$ (impliquant que toute partie finie d'une fibre de $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S'}$ sur S est contenue dans un ouvert affine) pour l'existence de $\prod_{S'/S} \underline{\mathrm{Pic}}_{X/S'}$.

Par exemple, lorsque X est un schéma <u>somme</u> de schémas X_i sur S satisfaisant les conditions de 3.1, l'énoncé 6.1 se réduit à l'énoncé trivial

$$\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S} \xrightarrow{\sim} \prod_i \underline{\mathrm{Pic}}_{X_i/S} \quad .$$

COROLLAIRE 6.2. - Soit $f : X \to S$ un morphisme projectif et plat à fibres géométriques localement intègres (par exemple un morphisme projectif et normal), alors $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ existe.

Dans ce cas d'ailleurs, S' est un revêtement étale de S (vrai chaque fois que f est séparable, i. e. plat à fibres géométriques réduites), et on vérifie que le théorème de structure énoncé dans le n° 3 pour $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ est encore valable, grâce à la structure analogue de $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S'}$.

D'autre part, un procédé de descente donne un théorème d'existence relatif, dont la portée dépend d'ailleurs de la solution des questions de descente non plate soulevées dans [4], I, A (c), et dont nous nous contentons d'expliciter ici un cas particulier :

PROPOSITION 6.3. - Soit $f : X \to S$ un morphisme propre, soient X_1 et X_2 deux sous-préschémas de X plats sur S, définis par deux Idéaux cohérents $\mathcal{J}_1$ et $\mathcal{J}_2$ tels que $\mathcal{J}_1 \cap \mathcal{J}_2 = (0)$ et que $\mathcal{O}_X/(\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2)$ soit plat sur S (i. e. le sous-préschéma de X sup de X_1 et X_2 est X, tandis que leur inf Z est plat sur X). Supposons de plus que, pour tout $s \in S$, les Hom $k(s) \to H^0(X_{i_s}, \mathcal{O}_{X_{i_s}})$, $i = 1, 2$, soient bijectifs. Alors l'homomorphisme naturel de foncteurs

$$\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S} \to \underline{\mathrm{Pic}}_{X_1/S} \times \underline{\mathrm{Pic}}_{X_2/S}$$

est représentable par des morphismes affines, donc si $\underline{\mathrm{Pic}}_{X_1/S}$ et $\underline{\mathrm{Pic}}_{X_2/S}$ existent, il en est de même de $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$, et le morphisme canonique

$$\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S} \to \underline{\mathrm{Pic}}_{X_1/S} \times \underline{\mathrm{Pic}}_{X_2/S}$$

est affine.

Par descente fidèlement plate, on est ramené au cas où Z admet une section sur S, définissant donc des sections de X, X_1, X_2 sur S, permettant d'éliminer les automorphismes dans les structures considérées comme expliqué dans 2.5. La démonstration consiste alors à noter que la donnée d'un Module inversible "rigidifié" $\mathcal{L}$ sur X équivaut à la donnée d'un triple $(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, u)$, où $\mathcal{L}_i$ est un Module inversible "rigidifié" sur X_i, et u un isomorphisme de $\mathcal{L}_1|Z$ avec $\mathcal{L}_2|Z$, compatible avec les rigidifications. Il y a seulement à vérifier que pour $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ fixés, la donnée de u s'exprime par une section d'un schéma convenable sur S affine sur S, ce qui est facile. On conclut facilement de 6.3 :

COROLLAIRE 6.4. - Soit X un schéma propre et séparable sur un corps k, et soient X_i les composantes irréductibles de X. Si les $\underline{\mathrm{Pic}}_{X_i/k}$ existent, il en est de même de $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/k}$, et le morphisme canonique

$$\underline{\mathrm{Pic}}_{X/k} \to \prod_i \underline{\mathrm{Pic}}_{X_i/k}$$

est affine.

Combiné à 6.2, cela montre par exemple l'existence de $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/k}$ chaque fois que X est un schéma projectif et séparable sur un corps k. Lorsque X n'est plus séparable sur k, on a également un résultat de réduction, en utilisant un raisonnement dû à OORT [11]. La méthode s'applique également sur un schéma de base quelconque (cas utile par exemple pour démontrer dans l'exposé suivant le résultat de finitude annoncé dans 3.3). Pour éviter un énoncé trop technique, bornons-nous au cas où l'on est sur un corps de base :

PROPOSITION 6.5. - Soient X un schéma propre sur un corps k, X_0 un sous-schéma ayant même ensemble sous-jacent (donc défini par un Idéal nilpotent sur X). Alors le morphisme fonctoriel $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/k} \to \underline{\mathrm{Pic}}_{X_0/k}$ est représentable par morphismes affines. En particulier, si $\underline{\mathrm{Pic}}_{X_0/k}$ existe, il en est de même de $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/k}$, et le morphisme $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/k} \to \underline{\mathrm{Pic}}_{X_0/k}$ est affine.

Combinant avec 6.4, on conclut facilement :

COROLLAIRE 6.6. - Soit X un préschéma projectif sur un corps k, alors $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/k}$ existe.

<u>Remarque</u> 6.6. - Il est extrêmement plausible que pour tout schéma X <u>propre</u> sur un corps k, $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/k}$ existe. Les résultats qui précèdent nous ramènent, dans cette question, au cas où k est algébriquement clos, et où X est intègre. On sait alors qu'il existe un schéma intègre X' <u>projectif</u> sur k et un morphisme dominant $g : X' \to X$ (lemme de Chow). Il suffirait donc de montrer que le

morphisme fonctoriel correspondant $\underset{\sim}{\mathrm{Pic}}_{X/k} \to \underset{\sim}{\mathrm{Pic}}_{X'/k}$ est représentable (et sans doute, représentable par morphismes affines), puisqu'on sait par ailleurs que $\underset{\sim}{\mathrm{Pic}}_{X'/k}$ est représentable. Cela soulève des questions de descente non plate non résolues pour l'instant. On notera que lorsqu'on se borne à considérer la restriction du foncteur $\underset{\sim}{\mathrm{Pic}}_{X/k}$ aux préschémas réduits, (X étant propre intègre sur k algébriquement clos), on obtient bien un foncteur représentable, comme l'a montré CHEVALLEY [1] dans le cas où X est normal, et SESHADRI [12] par une méthode de descente dans le cas général. Mais avec nos notations, le schéma construit par ces auteurs n'est pas $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/k}$, mais $(\underline{\mathrm{Pic}}_{X/k})_{\text{réd}}$, le schéma réduit correspondant à $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/k}$.

Remarque 6.7. - Soit plus généralement $f : X' \to X$ un morphisme surjectif de préschémas propres sur k. Alors des considérations de descente non plate conduisent à conjecturer que $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/k} \to \underline{\mathrm{Pic}}_{X'/k}$ est un morphisme affine, ce qui impliquerait en particulier (en divisant par les composantes connexes des éléments neutres) que l'homomorphisme correspondant sur les groupes de Néron-Severi est injectif modulo torsion. C'est ce qu'on peut vérifier par la théorie des intersections lorsque X et X' sont non singuliers. La réponse ne semble pas connue dans tout autre cas.

Remarque 6.8. - Contrairement à ce qu'on pourrait penser, la considération des schémas de Picard de schémas algébriques à éléments nilpotents est utile, et même indispensable, dans diverses questions. Ainsi, lorsque X est un schéma projectif, disons régulier, et Y une section hyperplane, il y a lieu de considérer les "voisinages infinitésimaux" de tous ordres X_n de Y, et les schémas de Picard $\underline{\mathrm{Pic}}_{X_n/k}$; lorsque X est irréductible de dimension $\geqslant 4$ (resp. $\geqslant 3$), le morphisme canonique

$$\underline{\mathrm{Pic}}_{X/k} \to \underline{\mathrm{Pic}}_{X_n/k} \qquad (n \text{ grand})$$

est un isomorphisme (resp. induit un isomorphisme pour les images inverses des sous-groupes de torsion de Néron-Severi), résultat qui nous sera utile dans l'étude qualitative des schémas de Picard dans l'exposé suivant. De même, la considération des schémas de Picard de certaines courbes à éléments nilpotents et les théorèmes fondamentaux de géométrie formelle [3], permettent de vérifier, dans le cas d'égales caractéristiques, une conjecture de MUMFORD, savoir que pour tout anneau local noethérien normal complet A de dimension 2, le groupe des classes de diviseurs de A peut être considéré comme l'ensemble des points rationnels sur k d'un groupe algébrique G sur le corps résiduel k (G étant d'ailleurs déterminé canoniquement une fois qu'on se donne un corps de représentants dans A). Dans le cas où A est de dimension quelconque, il est plausible qu'il existe un pro-groupe algébrique sur k jouant le même rôle que G ci-dessus, qui se construit, dans le cas où on peut "désingulariser" Spec(A) , comme une limite projective de schémas de Picard de schémas projectifs (à éléments nilpotents) convenables sur k .

BIBLIOGRAPHIE

[1] CHEVALLEY (Claude). - Sur la théorie de Picard, Amer. J. of Math., t. 82, 1960, p. 435-490.

[2] GROTHENDIECK (A.) et DIEUDONNÉ (J.). - Eléments de géométrie algébrique, Chapitre I et suivants. - Paris, Presses universitaires de France, 1960-1961 (Institut des Hautes Etudes Scientifiques, Publications mathématiques 4, 8, ...).

[3] GROTHENDIECK (Alexander). - Géométrie formelle et géométrie algébrique, Séminaire Bourbaki, t. 11, 1958/59, n° 182, 28 p.

[4] GROTHENDIECK (Alexander). - Techniques de descente et théorèmes d'existence en géométrie algébrique, I-IV., Séminaire Bourbaki, t. 12, 1959/60, n° 190, 29 p. et n° 195, 22 p. ; t. 13, 1960/61, n° 212, 20 p. et n° 221, 28 p.

[5] GROTHENDIECK (Alexander). - Techniques de construction en géométrie analytique, I-X, Séminaire Cartan, t. 13, 1960/61 : Déformation des structures analytiques complexes, n° 7-17.

[6] GROTHENDIECK (Alexander). - Séminaire de géométrie algébrique, rédigé par Lichtenbaum, Harvard University, 1961 (à paraître).

[7] LANG (Serge). - Abelian varieties. - New York, Interscience Publishers, 1959 (Interscience Tracts in pure and applied Mathematics, 7).

[8] MUMFORD (D.). - An elementary theorem in geometric invariant theory, Bull. Amer. math. Soc., t. 67, 1961, p. 483-486.

[9] MUMFORD (D.). - The topology of normal singularities of an algebraic surface and a criterion for simplicity. - Paris, Presses universitaires de France, 1961 (Institut des Hautes Etudes Scientifiques. Publications mathématiques, 9).

[10] MUMFORD (D.) and TATE (J.). - Séminaire de géométrie algébrique, Harvard University, Spring Term 1962 (à paraître).

[11] OORT (F.). - Sur le schéma de Picard, Bull. Soc. math. France, t. 90, 1962 (à paraître).

[12] SESHADRI (C. S.). - Thèse à paraître dans Annali di Matematica.

TECHNIQUE DE DESCENTE ET THÉORÈMES D'EXISTENCE EN GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE
VI. LES SCHÉMAS DE PICARD : PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES

par Alexander GROTHENDIECK

0. Compléments à l'exposé précédent ([3], V) (1).

Il y a eu quelques progrès concernant les questions d'existence de préschémas de Picard soulevés dans [3], V :

a. (MUMFORD). Il n'est pas vrai en général que lorsque $f : X \to S$ est un morphisme projectif et séparable (= plat à fibres séparables), le préschéma de Picard $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ existe, même si les fibres de f sont de dimension 1, et si S est le spectre d'un anneau de valuation discrète complet. Un exemple en est fourni en prenant $S = \mathrm{Spec}\ \underset{\sim}{R}[[t]]$, et pour X le sous-schéma de $\underset{\sim}{P}^2_S$ défini par l'équation (où x, y, z sont des variables homogènes) $x^2 + y^2 = tz^2$, qui représente donc une conique dégénérant en deux droites concourrantes géométriquement, mais la fibre spéciale sur le corps $\underset{\sim}{R}$ étant néanmoins irréductible (elle est donnée par l'équation $x^2 + y^2 = 0$ sur $\underset{\sim}{R}$). On voit facilement que, après extension étale $S' \to S$, avec $S' = \mathrm{Spec}\ \underset{\sim}{C}[[t]]$, le préschéma de Picard de X'/S' existe, et on en obtient une description explicite comme somme de copies $\tilde{S}$, où $\tilde{S}$ est déduit de S en dédoublant une infinité de fois l'origine. On constate aisément que la donnée de descente sur $\underline{\mathrm{Pic}}_{X'/S'}$ pour $S' \to S$ (donnée ici par les opérations du groupe de Galois $\underset{\sim}{Z}/2\underset{\sim}{Z}$ de S' sur S) n'est pas effective, le groupe échangeant entre eux certains points dédoublés (de sorte qu'il y a des orbites qui ne sont pas contenues dans un ouvert affine). Cependant, MUMFORD peut montrer que si $f : X \to S$ est un morphisme projectif séparable tel que, pour tout $s \in S$, les composantes irréductibles de X_s sont géométriquement irréductibles relativement à $k(s)$, alors $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ existe ; sa démonstration s'appuie sur un raffinement de son théorème de passage au quotient, cf. [7]. Noter d'autre part qu'il reste possible que, sans hypothèses sur les composantes irréductibles des fibres X_s, le schéma $\underline{\mathrm{Pic}}^{\tau}_{X/S}$ (qui sera introduit plus bas) existe pourtant.

b. (MURRE). Soit X un schéma propre sur un corps, alors $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/k}$ existe. La démonstration reprend en partie la démonstration de CHEVALLEY [1], et s'appuie à fond sur la structure de groupe du foncteur de Picard.

Pour certains compléments concernant la théorie des schémas de Picard, notamment en relation avec les schémas abéliens, il y aura intérêt à consulter [7]. Enfin, une lacune notable du présent exposé est l'absence de "critères d'équivalence", permettant de comparer le schéma de Picard d'un schéma projectif, et de ses sections hyperplanes ; les théorèmes-clefs pour développer de tels critères se trouvent dans [5], auquel il faut joindre les théorèmes d'existence des schémas de Picard.

1. Propriétés topologiques des préschémas en groupes commutatifs.

Soient d'abord k un corps, G un préschéma en groupes sur k. Comme l'élément neutre e, étant rationnel sur k, est nécessairement fermé, il s'ensuit aussitôt que la diagonale de $G \times_k G$ est fermée, donc G est séparé : tout préschéma en groupes sur un corps est séparé. Nous désignerons par G^o la composante connexe de l'élément neutre e. Comme e est rationnel sur k, G^o est en fait géométriquement connexe, i. e. la formation de G^o est compatible avec le changement de corps de base. Il s'ensuit aussi que G^o est stable par multiplication (ensemblistement), et lorsque G est localement noethérien, donc G^o ouvert, on peut considérer G^o comme un sous-groupe ouvert de G. Dans la suite, nous supposerons G localement de type fini sur k ; alors G^o est géométriquement irréductible et de type fini sur k. En effet, on peut supposer k algébriquement clos, donc de plus G réduit (car $G_{\text{réd}}$ sera alors un sous-groupe de G, compte tenu que $G_{\text{réd}} \times_k G_{\text{réd}}$ sera encore réduit), donc simple sur k sur un ouvert non vide, donc partout comme on voit en translatant ledit ouvert. Mais alors G est localement irréductible, donc ses composantes irréductibles sont identiques à ses composantes connexes, donc G^o est irréductible. Soit alors U un voisinage affine de e dans G^o ; utilisant le fait que G^o est irréductible, on voit tout de suite que $U.U = G^o$, ce qui prouve que G^o est quasi-compact, donc de type fini sur k.

Supposons pour simplifier que G soit commutatif. Pour tout entier $n > 0$, soit $G^{(n)}$ l'image inverse de G^o par l'homomorphisme φ_n de puissance n-ième dans G, donc $G^{(n)}$ est un sous-groupe ouvert de G. Nous poserons :

$$G^{\tau} = \bigcup_n G^{(n)}$$

$$G^{\sigma} = \bigcup_{(n,p)=1} G^{(n)}$$

$$G^{\rho} = \bigcup_{h} G^{(p^h)}$$

où p est l'exposant caractéristique pour le corps k. On obtient donc autant de sous-groupes ouverts de G, satisfaisant

$$G^{\sigma} \cap G^{\rho} = G^{o} , \qquad G^{\sigma}.G^{\rho} = G^{\tau} \qquad .$$

Remarque. - On peut construire le schéma en groupes quotient $G/G^{o} = N$ (cf. [3], IV), et définir alors G^{τ}, G^{σ}, G^{ρ} comme les images inverses dans G du sous-groupe de torsion de N (resp. de sa composante p-primaire, resp. du complémentaire naturel de cette dernière, somme des composantes q-primaires pour q nombre premier $\neq p$). On notera à ce propos que N est un schéma en groupes discret séparable sur k, donc (une fois choisi une clôture algébrique $\overline{k}$ de k, donnant lieu à un groupe de Galois π) s'identifie à un groupe discret ordinaire sur lequel π opère par automorphismes. C'est de cette façon qu'on peut interpréter de façon évidente la construction du sous-groupe de torsion et la décomposition de ce dernier en ses composantes q-primaires. Lorsque G est le schéma de Picard d'un schéma X propre sur k, N pourra s'appeler le schéma de Néron-Severi (réduit) de X sur k. Lorsque $G^{o}_{\text{réd}}$ est un sous-schéma en groupes de G^{o}, ce qui a lieu en particulier chaque fois que k est parfait ou que G^{o} est propre sur k (par exemple X géométriquement normal), il y a lieu également d'introduire le quotient $N' = G/G^{o}_{\text{réd}}$, qui a tendance à se comporter mieux que N du point de vue spécialisation, i. e. quand X varie dans une famille de schémas algébriques.

Soient maintenant S un préschéma localement noethérien, et G un préschéma en groupes sur S, localement de type fini sur S. Nous ne supposons pas G de type fini sur S, ni séparé sur S. Nous poserons alors

$$G^{o} = \bigcup_{s \in S} (G_s)^{o} \qquad ,$$

et lorsque G est commutatif :

$$G^{\tau} = \bigcup_{s\in S} (G_s)^{\tau} , \qquad G^{\sigma} = \bigcup_{s\in S} (G_s)^{\sigma} , \qquad G^{\rho} = \bigcup_{s\in S} (G_s)^{\rho} \qquad .$$

Ce sont là des parties de G , stable par la multiplication de G , ce qui n'implique évidemment pas qu'elles puissent être définies à l'aide de sous-préschémas en groupes de G . Notamment, il semble qu'il n'existe pas en général de sous-préschéma en groupes de G dont l'ensemble sous-jacent soit G^o . Bien entendu, si l'un de ces ensembles est ouvert, alors, muni de la structure induite, c'est un sous-préschéma en groupes ouvert de G . Nous verrons qu'il en est toujours ainsi de G^τ ; ainsi, du point de vue des foncteurs représentables, en particulier du point de vue "spécialisations", l'équivalence numérique se comporte de façon plus satisfaisante que l'équivalence algébrique. Voici les principales propriétés générales des ensembles qu'on vient de définir :

THÉORÈME 1.1. - G^o , G^τ , G^σ , G^ρ sont localement constructibles. De plus :

(i) G^o est quasi-compact sur S . Lorsque les G^o_s sont propres et G séparé sur S , alors G^o est propre sur S donc fermé dans G .

(ii) G^τ est ouvert. Si G^o est fermé, il en est de même de G^τ .

(iii) Si G^o est fermé, il en est de même de G^σ pourvu qu'on soit en égale caractéristique, i. e. tous les corps résiduels de S ont même caractéristique. Si G^o est fermé et si $G \to S$ est universellement ouvert en les points de G^σ (cf. corollaire 1.5 ci-dessous), alors $G^\sigma \to S$ est universellement ouvert.

(iv) Si G^o est fermé, il en est de même de G^ρ . Supposons qu'on soit en égale caractéristique, et que, pour tout entier $n > 0$ tel que $(n , p) = 1$, l'homomorphisme de puissance n-ième dans G soit ouvert, alors G^ρ est ouvert.

Donnons des indications sur la démonstration. Le fait que G^o soit localement constructible, et quasi-compact sur S , est contenu dans le lemme suivant :

LEMME 1.2. - Supposons que S soit $\neq \emptyset$, alors il existe un ouvert non vide U dans S , et un schéma en groupes de type fini H sur U à fibres connexes, enfin un homomorphisme de schémas en groupes $H \to G|U$ qui soit une immersion ouverte ayant pour image $G^o|U$.

Pour prouver le lemme, on peut supposer S irréductible, soit η son point générique, et faisons le changement de base $S' = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{S,\eta}) \to S$, on trouve un schéma en groupes G' sur un anneau artinien local $\mathcal{O}_{S,s} = A$, dans lequel on a un sous-schéma en groupes ouvert G'^o de type fini sur A , comme on a dit plus haut. Il provient donc d'un schéma en groupes de type fini H sur un voisinage ouvert U de η , et l'immersion canonique $G'^o \to G'$ provient d'une immersion ouverte $H \to G|U$, qui sera un homomorphisme de schémas en groupes pour U assez petit. Comme les fibres de H sont connexes si on prend U assez petit, et toutes de même dimension, égale à celle des fibres de G pour U assez petit, il s'ensuit que, pour tout $s \in U$, l'image de H_s dans G_s est exactement G_s^o (U assez petit), ce qui prouve 1.2.

La deuxième assertion dans (i) est contenue dans le lemme suivant (qu'on applique à un voisinage ouvert quasi-compact de G^o dans G) :

LEMME 1.3. - Soient X un préschéma de type fini et séparé sur S localement noethérien, g une section de X sur S , X^o la réunion des composantes connexes des $g(s)$ dans les X_s . Soit $s \in S$, tel que X_s^o soit propre sur $k(s)$, alors il existe un voisinage ouvert U de s , tel que $X^o|U$ soit propre sur U , et a fortiori fermé dans $X|U$.

Par descente fidèlement plate de la base, on se ramène au cas où S est le spectre d'un anneau local complet, et s son point fermé. Appliquant [2], III, 5.5.1, on voit que X se décompose en somme de deux ouverts disjoints X' et X'' , le premier propre sur S et tel que $X'_s = X_s^o$. Cela nous ramène au cas où $X = X'$, i. e. où X est propre sur S . Dans ce cas on s'en tire par une démonstration standard, utilisant le critère valuatif de propreté d'une partie (oublié dans [2], chap. II).

Prouvons que G^τ est ouvert, ou ce qui revient au même, compte tenu que la formation de G^τ (comme celle de G^o , G^σ , G^ρ) commute à l'extension de la base : pour toute section g de G sur S , $g^{-1}(G^\tau)$ est ouvert. Cela signifie deux choses :

a. Soit $y \in S$ tel que $g(y) \in G^\tau$, alors pour tout $y' \in \overline{y}$ voisin de y , on a $g(y') \in G^\tau$.

b. Soit $y' \in S$ tel que $g(y') \in G^\tau$, alors, pour toute générisation y de y', on a $g(y) \in G^\tau$.

Pour (a), on note qu'il existe un entier $n > 0$ tel que $g^n(y) \in G^o$, comme G^o est constructible, $(g^n)^{-1}$ (G^o) est constructible, il s'ensuit que l'on a $g^n(y') \in G^o$ pour $y' \in \overline{y}$ voisin de y . Pour (b), on note que les $g(y')^n = g^n(y')$ restent dans un ouvert quasi-compact de $G_{y'}$ (car ils sont contenus dans un nombre fini de classes mod $G_{y'}^o$), donc il existe un ouvert quasi-compact U dans G qui contient les $g^n(y')$, donc aussi leurs générisations $g^n(y)$, donc les puissances de $g(y)$ restent dans un ouvert quasi-compact de G_y , ce qui implique facilement que $g(y) \in G_y^\tau$.

Supposons $G^{\cap}$ fermé, prouvons qu'il en est de même de G^{τ}. Comme on sait déjà que G^{τ} est ouvert, donc localement constructible, il reste à prouver qu'il est stable par spécialisation, ce qui provient du fait que c'est une réunion de fermés, à savoir les images inverses, par les homomorphismes φ_n de puissance n-ième, du fermé G^{o}.

Le même argument prouvera que G^{σ} et G^{ρ} sont fermés si G^{o} l'est (sous réserve dans le premier cas qu'on soit en égale caractéristique), une fois démontré que G^{σ} et G^{ρ} sont localement constructibles. Or, pour $x \in G^{\tau}$, soit $\nu(x)$ le plus petit entier $n > 0$ tel que l'homomorphisme φ_n de puissance n-ième envoie x dans G. Donc G^{σ} (resp. G^{ρ}) est formé des $x \in X$ tels que $\nu(x)$ soit premier à p (resp. une puissance de p) et notre assertion de constructibilité résulte alors de la suivante, plus précise :

LEMME 1.4. - La fonction ν sur G^{τ} est localement constructible.

Cela signifie en effet que, pour tout entier $n > 0$, l'ensemble des $x \in G^{\tau}$, tels que $\nu(x) = n$, est localement constructible ; or c'est la différence de $\varphi_n^{-1}(G^{o})$ et de la réunion des $\varphi_d^{-1}(G^{o})$, où d parcourt les diviseurs propres de n ; comme G^{o} est localement constructible, il en est de même des $\varphi_i^{-1}(G^{o})$, donc aussi de la différence précédente.

Supposons G^{o} fermé et $G \to S$ universellement ouvert en les points de G^{σ}, prouvons que $G^{\sigma} \to S$ est ouverte, i. e. transforme un voisinage dans G^{σ} d'un $x \in G^{\sigma}$ en un voisinage de $y = f(x)$. Comme G^{σ} est localement constructible, on est ramené à prouver que, pour toute générisation y' de y, il existe une générisation x' de x dans G au-dessus de y'. Cela nous ramène par changement de base au cas où S est le spectre d'un anneau de valuation discrète et où y, y' sont respectivement le point fermé et le point générique. Utilisant le fait que $G \to S$ est ouvert en x (donc qu'il existe une générisation x_1 de x dans G au-dessus de y'), on peut supposer de plus qu'il existe une section g de G sur S, telle que $x = g(y)$ (quitte à faire encore un changement de base). Si $k(y')$ est de caractéristique 0, il suffit de prendre n'importe quelle générisation x' de x dans G au-dessus de y', elle est dans G^{τ} puisque G^{τ} est ouvert, donc dans G^{σ} puisque $G^{\sigma}_{y'} = G^{\tau}_{y'}$. Si la caractéristique de $k(y')$ est $p > 0$, posons

$$\nu(g(y')) = p^h m \quad \text{avec} \quad (m, p) = 1 \quad ;$$

soient a et b deux entiers tels que $ap^h + bm = 1$, posons

$$g_1 = g^{ap^h} , \qquad g_2 = g^{bm} \qquad \text{d'où} \quad g = g_1\, g_2 \qquad ;$$

donc par construction, on a $g_1(y') \in G^\sigma$ et $g_2(y') \in G^\rho$. Comme G^o est fermé il s'ensuit que $g_1(y) \in G^\sigma$ et $g_2(y) \in G^\rho$, d'où, en vertu de

$$g(y) = g_1(y)\ g_2(y) \in G^\sigma \qquad ,$$

aussi $g_2(y) \in G^\sigma$, donc

$$g_2(y) \in G^\sigma_y \cap G^\rho_y = G^o_y \qquad .$$

Or de l'hypothèse, et du fait que S est le spectre d'un anneau de valuation discrète, résulte que $G - (G_y - G^o_y)$ est un ouvert de G sur lequel $G \to S$ induit un morphisme ouvert, donc que, par tout point de G^o_y, passe une "quasi-section" ; par suite, quitte à faire encore une extension sur la base S, on peut supposer qu'il existe une section g'_2 de G^o sur S telle que $g'_2(y) = g_2(y)$. Posons $g' = g_1\, g'_2$; alors, par construction, $g'(y) = g(y) = x$, et $g'(y') = g_1(y')\ g'_2(y') \in G^\sigma$, donc $g(y') = x'$ est une générisation de x dans G^σ au-dessus de y', ce qui prouve (iii).

Prouvons enfin la dernière assertion (iv). On est ramené à prouver que, si $x \in G^\rho$, alors toute générisation x' de x est dans G^ρ. On peut supposer (quitte à prendre les images par φ_{n^h} pour h convenable) que l'on a même $x \in G^o$. Alors, pour tout entier n premier à la caractéristique, x est dans l'image de φ_n (car la puissance n-ième dans un groupe de type fini connexe sur un corps de caractéristique première à n est surjective). Comme φ_n est ouverte, il s'ensuit que x' est également dans l'image de φ_n. Plus précisément, soit U un ouvert quasi-compact de G^τ contenant G^o_y, alors on a $x' \in \varphi_n(U)$ pour tout n premier à p. Prenant pour n un multiple commun des facteurs premiers à p des $\nu(z)$, pour $z \in U$, on trouve que $x' \in G^\rho$.

L'assertion (1.1), (iii), se complète ainsi :

COROLLAIRE 1.5. - Soit $n > 1$ un entier tel que l'homomorphisme de puissance n-ième $\varphi_n : G \to G$ soit universellement ouvert, (par exemple étale) posons $G^{(n)} = \varphi_n^{-1}(G^o)$, et supposons que les fibres connexes G^o_s ne "contiennent pas de composante additive" (i. e. le groupe déduit par extension du corps $k(s)$ à la clôture algébrique ne contient pas de sous-groupe isomorphe à G_a). Alors $G \to S$ est universellement ouvert en les points des $G^{(n^h)}$. En particulier, si les G_s^o ne contiennent pas de composante additive et si, pour tout entier $n > 1$, l'homomorphisme φ_n est universellement ouvert en les points de caractéristique résiduelle première à p , alors $G \to S$ est universellement ouvert en les points de G^σ , donc ((1.1), (iii)) si G^o est fermé, $G^\sigma \to S$ est universellement ouvert. Dans ces cas, $s \rightsquigarrow \dim G_s$ est une fonction localement constante sur S .

En effet, de l'hypothèse résulte que le noyau ${}_nG$ de φ_n est universellement ouvert sur S , donc $G \to S$ est universellement ouvert en les points de ${}_nG$, donc (remplaçant n par n^h) en les points des ${}_{(n^h)}G$. Or l'hypothèse sur les fibres G_s^o sert exactement à assurer que les points d'ordre une puissance de n dans G_s sont denses dans la réunion des $G^{(n^h)}$, d'où résulte facilement que $G \to S$ est universellement ouvert en tous les points de cette réunion, en particulier le long de la section unité, d'où facilement le fait que $s \rightsquigarrow \dim G_s$ est une fonction localement constante.

<u>Remarque</u> 1.6. - Rappelons qu'un morphisme $X \to S$ est dit universellement ouvert s'il transforme tout ouvert en un ouvert, et garde cette propriété louable après tout changement de base $S' \to S$. Cela signifie aussi (lorsque S est localement noethérien et $X \to S$ localement de type fini), que toute composante irréductible de X domine S , et que cette propriété est conservée après tout changement de base $S' \to S$. Dans ces deux assertions, il suffit d'ailleurs (moyennant les hypothèses de finitude ci-dessus) de tester avec des changements de base $S' \to S$, où S' est le spectre d'un anneau de valuation discrète, (complet à corps résiduel algébriquement clos si on y tient ...). La définition s'étend de façon évidente au cas d'une partie Z de X (telle la partie G^σ de G). C'est un phénomène parfaitement normal, même si on part d'un morphisme projectif simple $X \to S$ à fibres géométriques connexes (par exemple le carré fibré de la famille modulaire de courbes elliptiques sur $S = \operatorname{Spec} \underset{\sim}{C}[j]$), que $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ ne soit pas universellement ouvert sur S , i. e. qu'il puisse y avoir des composantes irréductibles de $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ se trouvant tout entières au-dessus d'un seul point de S : cela est lié au fait que le rang du groupe de Néron-Severi des fibres de X/S peut faire des sauts vers le haut (phénomènes de "multiplication complexe"). Par contre, (1.5) nous assure que, dans les bons cas, $\underline{\mathrm{Pic}}^\sigma_{X/S}$ (et le plus souvent même, semble-t-il, $\underline{\mathrm{Pic}}^\tau_{X/S}$) est universellement ouvert sur S .

Enfin, voici un cas utile où, exceptionnellement, G^o consente à être ouvert :

COROLLAIRE 1.7. - Supposons que $G \to S$ soit universellement ouvert en les points de G^o (cf. (1.5)), et que les fibres G_s soient séparables, donc simples sur $k(s)$ (cette dernière condition étant automatiquement remplie en caractéristique résiduelle nulle, en vertu d'un résultat de CARTIER). Alors G^o est ouvert dans G. Si de plus S est réduit, G^o est simple (en particulier, plat) sur S.

La première assertion peut d'ailleurs se préciser en notant que si, pour un $s \in S$ donné, $G \to S$ est universellement ouvert en les points de G^o_s et si G^o_s est séparable sur $k(s)$, alors G^o est un voisinage de G^o_s (et d'ailleurs, l'hypothèse faite en s restera vérifiée en les points voisins). Cet énoncé, d'ailleurs indépendant de toute structure de groupes, se trouvera démontré dans [2], IV, paragraphe 7. La dernière assertion dans (1.7), également indépendante de toute structure de groupe et de toute question de composante connexe, est un cas particulier d'un critère de platitude donné dans [IV], paragraphe 5, qui implique, plus généralement :

COROLLAIRE 1.8. - Soit U une partie ouverte d'une fibre G_s, telle que $G \to S$ soit universellement ouvert en les points de U (cf. (1.5)). Si G_s est séparable sur $k(s)$ et S réduit en s, alors G est plat sur S en les points de U (donc en l'occurence, simple sur S en les points de U).

<u>Remarques</u> 1.9. - J'ignore si, lorsque G est séparé sur S, G^o ou G^τ est toujours fermé dans G ; cela semble peu probable. On trouve en tous cas des contre-exemples évidents si on laisse tomber l'hypothèse de séparation, par exemple en prenant la droite affine dont on dédouble une infinité dénombrable de fois l'origine, obtenant ainsi un schéma en groupes G sur la droite affine dont toutes les fibres sont réduites au groupe unité, sauf une dont la fibre est $\underset{\sim}{Z}$. Ce schéma en groupes est un sous-schéma en groupes ouvert, savoir l'adhérence de la section unité, dans le préschéma de Picard du S-schéma X correspondant à une famille de coniques dégénérant en deux droites concourrantes.

D'ailleurs, même en partant d'un schéma en groupes fini et plat, G, sur le spectre S d'un anneau de valuation discrète V, et par suite si G^o est réduit à la section unité, donc fermé, diverses conclusions deviennent fausses si on abandonne certaines hypothèses. Supposons que V soit d'égale caractéristique $p > 0$, et soit G le noyau de l'homomorphisme $\underset{\sim}{G}_a \longrightarrow \underset{\sim}{G}_a$ défini par l'homomorphisme de foncteurs $f \rightsquigarrow f^p - tf$ où t est une uniformisante de V.

(Se rappeler que, par définition, le "groupe additif" $\underset{\sim}{G}_a$ sur S représente le foncteur $S' \rightsquigarrow \Gamma(S', \mathcal{O}_{S'})$.) Alors, en tant que S-schéma, $G = \operatorname{Spec} V[x]/(x^p - tx)$ est réunion de p "droites" concourrantes, figurant un groupe $\underset{\sim}{Z}/p\underset{\sim}{Z}$ qui dégénère en un groupe infinitésimal de type additif. Dans cet exemple, $G^o = G^\sigma$ (et c'est l'une des p droites), donc n'est pas ouvert dans G. Dans le cas d'inégale caractéristique, caractéristique résiduelle $p > 0$, partons du schéma en groupes $H = \mu_p$ noyau de la puissance p-ième dans $\underset{\sim}{G}_m$, donc $H = \operatorname{Spec} V[x]/(x^p - 1)$, c'est encore la réunion de p droites concourrantes, figurant un groupe $\underset{\sim}{Z}/p\underset{\sim}{Z}$ (en caractéristique 0) qui dégénère en un groupe infinitésimal de type multiplicatif en caractéristique p. Soit H' le "schéma en groupes constant" défini par le groupe fini ordinaire $\underset{\sim}{Z}/p\underset{\sim}{Z}$, donc la somme disjointe de $\underset{\sim}{Z}/p\underset{\sim}{Z}$ copies de S, ou encore $\operatorname{Spec} V^{\underset{\sim}{Z}/p\underset{\sim}{Z}}$. Alors $G = H \times_S H'$ décrit un groupe $(\underset{\sim}{Z}/p\underset{\sim}{Z})^2$ en caractéristique 0, dégénérant en un groupe infinitésimal fois $\underset{\sim}{Z}/p\underset{\sim}{Z}$ en caractéristique p. Ici G^ρ est la réunion de la section unité et la fibre spéciale, donc G^ρ n'est pas ouvert, alors que G^σ est la réunion de la section unité et de la fibre générale, donc n'est pas fermé, contrairement à ce qui est affirmé dans les cas d'égale caractéristique dans (1.1), (iii) et (iv). Bien entendu, ce sont là des phénomènes liés à la caractéristique $p > 0$. Les résultats qui précèdent donnent en effet :

COROLLAIRE 1.10. - Supposons les caractéristiques résiduelles de S toutes nulles, donc $G^\tau = G^\sigma$, et $G^o = G^\rho$. Alors $G^\tau = G^\sigma$ est ouvert, et même ouvert et fermé si G est séparé sur S et si les G^o_s sont propres ; sous cette même hypothèse, $G^o = G^\rho$ est propre sur S donc fermé dans G. Supposons enfin que, pour tout entier $n > 1$, l'homomorphisme de puissance n-ième dans G soit universellement ouvert, alors G^o est ouvert; et si de plus les G^o_s n'ont pas de composante additive (par exemple les G^o_s propres, comme ci-dessus), alors $G^\tau \to S$ est universellement ouvert, et même simple si S est réduit.

Signalons enfin le résultat facile suivant :

PROPOSITION 1.11. - Il existe une partie ouverte U de S, telles que l'ensemble G' des points de G **en lesquels** G est simple (resp. plat) au-dessus de S, soit l'ensemble sous-jacent à un sous-schéma en groupes ouvert induit de $G|U$. De plus, toute section de G sur U est une section de G' sur U.

COROLLAIRE 1.12. - Si G est simple (resp. plat) sur S en les points de la section unité, elle l'est en les points de toute section de G sur S, et en tous les points de G^o. Si de plus pour tout entier $n > 0$, l'homomorphisme de puissance n-ième $\varphi_n : G \to G$ est étale en les points de caractéristique première à n, alors G est simple (resp. plat) sur S en tous les points de G^σ.

2. Application aux propriétés locales des schémas de Picard.

THÉORÈME 2.1.

(i) Soit $f : X \to S$ un morphisme propre et simple, et supposons que $\mathrm{Pic}_{X/S}$ existe (par exemple f un morphisme projectif). Alors $\mathrm{Pic}_{X/S}$ est séparé sur S, et pour toute partie fermée Z de $\mathrm{Pic}_{X/S}$ qui est de type fini sur S, Z est propre sur S.

(ii) Soit X un préschéma sur un corps k, propre et géométriquement normal. Alors $\mathrm{Pic}^o_{X/S}$ est propre sur k.

Démonstration.

(i) Les critères valuatifs ([2], II, paragraphe 7) nous ramènent à prouver ceci : si S est le spectre d'un anneau de valuation discrète complet, U l'ouvert réduit au point générique de S, alors toute section rationnelle de $\mathrm{Pic}_{X/S}$ sur S, i. e. toute section au-dessus de U, se prolonge de façon unique en une section au-dessus de S. Compte tenu de la définition de $\mathrm{Pic}_{X/S}$, cela équivaut à l'énoncé suivant : pour tout Module inversible $\mathcal{L}$ sur $V = f^{-1}(U)$, il existe un Module inversible sur X qui prolonge $\mathcal{L}$, unique à un isomorphisme près. Or ceci résulte facilement de la description des Modules inversibles sur V, resp. X en termes de classes de diviseurs "de Cartier", compte tenu que les anneaux locaux de X sont réguliers (X étant simple sur S régulier), donc factoriels en vertu de AUSLANDER, ce qui implique que tout diviseur sur S est un diviseur de Cartier. En effet tout diviseur sur V peut se prolonger en un diviseur sur X en prenant son "adhérence".

Remarque 2.2. - La démonstration reste valable en supposant seulement que f est plat et ses fibres X_s sont localement des intersections complètes, et simples sur $k(s)$ en codimension ≤ 2, compte tenu du résultat suivant démontré dans [5] : un anneau local noethérien intersection complète qui est régulier en codimension ≤ 3 est factoriel ("conjecture de Samuel"). On notera que le résultat devient faux si on remplace "codimension $\leqslant 2$ " par "codimension $\leqslant 1$ ", i. e. par l'hypothèse "normal", comme on peut se convaincre sur l'exemple d'une famille de quadratiques non singulières dégénérant en un cône quadratique.

(ii) Utilisant le lemme de Chow, on est ramené au cas où X est projectif, donc plongé dans P^n_k ; on peut supposer X connexe. Si $\dim X = 1$, alors X est simple sur k , et on applique (i). Si $\dim X \geqslant 2$, on peut utiliser une variante des "critères d'équivalence" connus, qui implique qu'il existe un nombre fini de courbes Y_i simples sur X (obtenues comme intersections de X avec des sous-espaces linéaires convenables de P^n_k), telles que $\underline{\mathrm{Pic}}^{\tau}_{X/k} \to \prod_i \underline{\mathrm{Pic}}^{\tau}_{Y_i/k}$ soit un monomorphisme, et induit a fortiori un monomorphisme pour les composantes connexes. Comme celle du second membre est propre sur k d'après ce qui précède, et qu'il s'agit d'un homomorphisme de schémas en groupes, qui sera nécessairement une immersion fermée, il s'ensuit que $\underline{\mathrm{Pic}}^{o}_{X/k}$ est également propre sur k . On peut éviter le recours aux délicats critères d'équivalence en utilisant la structure des groupes algébriques commutatifs sur un corps algébriquement clos (due à CHEVALLEY-BOREL) ; on est ramené à prouver que tout morphisme de la droite affine dans $\underline{\mathrm{Pic}}^{\tau}_{X/S}$ est constant, ce qui équivaut à dire que tout Module inversible sur $X[t]$ provient d'un Module inversible sur X , résultat qui est bien connu et fort élémentaire et n'utilise pas même le fait que X soit propre sur k (l'hypothèse X normal permettant de se réduire aussitôt au cas X régulier).

COROLLAIRE 2.3. - Soit $f : X \to S$ un morphisme propre et normal (i. e. plat et à fibres géométriques normales), supposons que $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ existe, alors $\underline{\mathrm{Pic}}^{o}_{X/S}$ est propre sur S , donc fermé dans $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$; de plus $\underline{\mathrm{Pic}}^{\tau}_{X/S}$ et $\underline{\mathrm{Pic}}^{\rho}_{X/S}$ sont également fermés, et aussi $\underline{\mathrm{Pic}}^{\sigma}_{X/S}$ en "égale caractéristique".

On applique (1.1) et (2.1), (ii).

COROLLAIRE 2.4. - Soit $f : X \to S$ un morphisme propre et simple, tel que $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ existe et soit somme de schémas $P^{(i)}$ de type fini sur S (cf. [3],V,4.1). Alors chaque $P^{(i)}$ est propre sur S .

Résulte de (2.1), (i). Comme on l'a signalé dans (2.2), le résultat peut se généraliser en faisant des hypothèses moins restrictives sur les fibres de f , mais devient faux si on se borne à supposer f normal. Dans ce cas, j'ignore d'ailleurs si $\underline{\mathrm{Pic}}^{\tau}_{X/S}$ est néanmoins propre sur S , même en admettant qu'il soit de type fini sur S .

THÉORÈME 2.5. - Soit $f : X \to S$ un morphisme propre et plat, tel que $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ existe, et pour tout entier n, soit φ_n l'homomorphisme puissance n-ième dans ce préschéma en groupes. Alors φ_n est étale en tous les points $x \in X$ à caractéristique résiduelle première à n.

Par la caractérisation infinitésimale des morphismes étales, cette assertion équivaut à la suivante :

LEMME 2.6. - Supposons que S soit le spectre d'un anneau local artinien A dont l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ soit de puissance $(\nu + 1)$-ième nulle, soit $A_{\nu-1} = A/\mathfrak{m}^{\nu}$, $X_{\nu-1} = X \otimes_A A_{\nu-1}$, $\mathcal{L}$ un Module inversible sur X, enfin $\mathcal{L}'_{\nu-1}$ un Module inversible sur $X_{\nu-1}$ dont la puissance tensorielle n-ième soit isomorphe à $\mathcal{L}_{\nu-1} = \mathcal{L} \otimes_A A_{\nu-1}$. Alors il existe un Module inversible $\mathcal{L}'$ sur X dont la puissance tensorielle n-ième est isomorphe à $\mathcal{L}$ (si n est premier à la caractéristique résiduelle de $k = k(A)$).

Prouvons le lemme. On pose $V = \mathfrak{m}^{\nu} = \mathfrak{m}^{\nu}/\mathfrak{m}^{\nu+1}$, c'est un espace vectoriel sur $k = k(A)$. On commence à prolonger $\mathcal{L}'_{\nu-1}$ en un Module inversible quelconque sur $\mathcal{L}'$ sur X. L'obstruction à ce faire se trouve dans $H^2(X_o , \mathcal{O}_{X_o}) \otimes_k V$, mais en vertu de l'hypothèse faite sur $\mathcal{L}'_{\nu-1}$ et du fait que $\mathcal{L}_{\nu-1}$ peut se prolonger, on voit que le produit de cette obstruction par n est nul, donc elle-même est nulle puisque n premier a la caractéristique. D'ailleurs, l'arbitraire dans le prolongement effectué se trouve dans $H^1(X_o , \mathcal{O}_{X_o}) \otimes_k V$, et la déviation ξ de $\mathcal{L}'^{\otimes n}$ avec $\mathcal{L}$ se trouve dans le même Module ; si on essaye de corriger $\mathcal{L}'$ de façon à rendre cette déviation nulle, on est ramené à trouver un η dans ledit Module, tel que $n\eta = \xi$. Or c'est possible encore grâce au fait que n est premier à la caractéristique.

COROLLAIRE. - Sous les conditions de (2.5), supposons de plus que les schémas de Picard des ~~fibres X_s ne contiennent pas de composante~~ additive (par exemple les X_s géométriquement normaux, cf. (2.1), (ii)). Alors $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S} \to S$ est universellement ouvert en les points de $\underline{\mathrm{Pic}}^{\sigma}_{X/S}$. Si $\underline{\mathrm{Pic}}^{o}_{X/S}$ est fermé (par exemple les X_s géométriquement normaux, cf. (2.3)), alors $\underline{\mathrm{Pic}}^{\sigma}_{X/S}$ est lui-même universellement ouvert sur S. Enfin, dans le cas d'égale caractéristique, $\underline{\mathrm{Pic}}^{\rho}_{X/S} \to S$ est universellement ouvert.

On applique (1.5) et (1.1).

COROLLAIRE 2.7. - Soit $f : X \to Y$ un morphisme propre et plat, tel que $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ existe. Alors la fonction $s \rightsquigarrow \dim \underline{\mathrm{Pic}}_{X_s/k(s)}$ sur S est semi-continue supérieurement (i. e. elle peut faire des sauts vers le haut, mais pas vers le bas), et elle est même continue (i. e. localement constante) si les $\underline{\mathrm{Pic}}_{X_s/k(s)}$ ne contiennent pas de composante additive.

La première assertion est vraie trivialement ou presque pour tout préschéma en groupes localement de type fini sur une base localement noethérienne, puisqu'il suffit de regarder le long de la section unité. La deuxième assertion résulte de (2.5).

REMARQUE 2.8. - Soient s , $s' \in S$ tels que s soit une spécialisation de s' , alors (2.7) équivaut à une inégalité (resp. égalité) entre les dimensions des schémas de Picard de $X_{s'}$ et de sa "spécialisée" X_s . D'ailleurs SERRE avait fait observer, dès avant la construction des schémas de Picard, que l'invariance de la dimension des Picards des X_s dans le cas d'un morphisme <u>simple</u> $f : X \to S$ était une conséquence formelle de la théorie de la spécialisation du groupe fondamental ([4], X), et des relations classiques à la Kummer entre les points d'ordre fini sur la variété de Picard, et le groupe fondamental rendu abélien, ([4], XI). Si on désigne de façon générale par α , μ , λ les dimensions de la partie abélienne, multiplicative, additive de $\underline{\mathrm{Pic}}_{X_s/k(s)}$, et qu'on définit de même α' , μ' , λ' , les relations connues, s'expriment par les inégalités suivantes :

$$(*) \qquad \alpha + \mu + \lambda \geqslant \alpha' + \mu' + \lambda'$$

(valable pourvu que $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ existe, donc problablement en tous cas), inégalité qui, pour $\lambda = \lambda' = 0$, se réduit à une égalité, valable sous les mêmes hypothèses d'existence :

$$\alpha + \mu = \alpha' + \mu' \qquad ;$$

d'autre part on a

$$(**) \qquad 2\alpha + \mu \leqslant 2\alpha' + \mu'$$

par l'argument de Serre, si les X_s sont séparables (sans même supposer l'existence de $\underline{\mathrm{Pic}}^{\tau}_{X/S}$), ou si les ${}_n\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ (noyaux de φ_n dans le foncteur de Picard) sont séparés sur S , (compte tenu qu'ils sont étales sur S grâce à (2.5)). On aurait tendance à conjecturer que (*) est une égalité en tous cas, ou du moins si les X_s sont séparables, et qu'on a des inégalités

$$(***) \qquad \alpha \leq \alpha' \ , \qquad \lambda \geq \lambda'$$

qui devraient être valables chaque fois qu'on a un préschéma en groupes, localement de type fini sur S localement noethérien, dans lequel la dimension des fibres est constante (voir (1.3) pour un résultat positif dans cette direction).

Remarque 2.9. - Dans tous les cas connus, $\underline{\mathrm{Pic}}^{\tau}_{X/S}$ est universellement ouvert sur S , mais il ne faut sans doute pas s'en autoriser pour des illusions excessives, même si $f : X \to S$ est simple ; en tous cas, MUMFORD a construit un exemple (il est vrai avec S non réduit, en fait S spectre d'un anneau artinien) où $\underline{\mathrm{Pic}}^{\tau}_{X/S}$ n'est pas plat sur S , en faisant varier infinitésimalement la surface de Igusa. Le point envisagé par MUMFORD se trouve d'ailleurs dans $\underline{\mathrm{Pic}}^{\rho}_{X/S}$, et il reste possible (pour $f : X \to S$ simple) que $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ soit plat sur S aux points de $\underline{\mathrm{Pic}}^{\sigma}_{X/S}$; le conférencier doute cependant qu'il en soit toujours ainsi, même en se restreignant aux points de $\underline{\mathrm{Pic}}^{o}_{X/S}$ et en supposant que S est le spectre d'un anneau de valuation discrète. La question est d'ailleurs liée à l'étude des points fixes d'un schéma abélien sous un groupe fini d'automorphismes, situation pour laquelle on semble manquer d'exemples. Il semblerait que même en se bornant à $f : X \to S$ simple et projectif, les résultats de régularité locale sur $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ énoncés dans le présent numéro, et les conjectures signalées dans (2.8), épuisent à peu près ce qu'on peut dire à ce sujet sans hypothèses plus particulières sur la nature des fibres de f . Rappelons cependant que, si les fibres géométriques de $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ sont <u>réduites</u> et sans composante additive, alors il résulte de (1.8) et de (2.5) que $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ est simple sur S en les points de $\underline{\mathrm{Pic}}^{\sigma}_{X/S}$ lorsque S est réduit ; ce résultat vaut même, si $f : X \to S$ est normal, sans hypothèse sur S , comme nous verrons dans (3.5). Signalons à ce propos :

PROPOSITION 2.10.

(i) Si $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ est simple (resp. plat) sur S en les points de la section unité, il l'est en tous les points de $\underline{\mathrm{Pic}}^{\sigma}_{X/S}$, et en les points de toute section de $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ sur S .

(ii) Soit $s \in S$ tel que $H^2(X_s, \mathcal{O}_{X_s}) = 0$, alors il existe un voisinage ouvert U de s tel que $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}|U$ soit simple sur U.

(iii) Soit X un schéma propre sur un corps, alors on a

$$\dim \underline{\mathrm{Pic}}_{X/k} \leq \dim H^1(X, \mathcal{O}_X) \quad ,$$

l'égalité ayant lieu si et seulement si $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/k}$ est simple sur k ; c'est toujours le cas si k est de caractéristique nulle.

(i) résulte de (2.5) et (1.12), (ii) du critère infinitésimal pour les morphismes simples et d'un calcul d'obstructions bien connu, compte tenu que (par le "théorème de semi-continuité") l'hypothèse faite en s sera encore vérifiée aux points voisins. Enfin (iii) résulte du fait que $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ est isomorphe à l'espace tangent de Zariski en l'élément neutre de $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/k}$; la dernière assertion est un cas particulier d'un théorème de CARTIER, disant qu'un "groupe formel" en caractéristique 0 est formellement simple sur k.

3. Le sous-schéma abélien canonique de $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$, et schéma d'Albanese.

PROPOSITION 3.1. - Soient k un corps, G un schéma en groupes de type fini sur k, commutatif et "sans composante additive". Alors $G^o_{\text{réd}}$ est séparable sur k, et par suite c'est un sous-schéma en groupes simple sur k.

La chose étant triviale si k est parfait, en particulier pour $G_{\bar{k}}$, où $\bar{k}$ est la clôture algébrique de k, il suffit de voir que $(G^o_{\bar{k}})_{\text{réd}}$ provient d'un sous-schéma de G. Or l'hypothèse sur $G_{\bar{k}}$ (pas de composante additive) résulte facilement qu'il existe un entier n tel que $(G^o_{\bar{k}})_{\text{réd}}$ soit l'image "schématique" de l'homomorphisme de puissance n-ième dans $G_{\bar{k}}$. Comme ce dernier homomorphisme provient de l'homomorphisme analogue pour G, l'image schématique de ce dernier répond à la question.

COROLLAIRE 3.2. - Soit X un schéma normal et propre sur k tel que $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/k}$ existe, alors il existe un sous-schéma abélien A de $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/k}$ dont l'ensemble sous-jacent est $\underline{\mathrm{Pic}}^o_{X/k}$.

En effet, en vertu de (2.1), (ii), $\mathrm{Pic}^o_{X/k}$ étant propre sur k satisfait à la condition de (3.1).

Le résultat précédent montre donc que, dans certains cas, la classique "variété de Picard" (qui serait notée $(\underline{\mathrm{Pic}}_{X/k})^{o}_{\mathrm{réd}}$ dans la théorie actuelle) "est définie sur k ", sans supposer le corps k parfait.

Soit maintenant $f : X \to S$ un schéma relatif propre et plat, avec $\mathcal{O}_S \xrightarrow{\sim} f_*(\mathcal{O}_X)$ pour simplifier, tel que $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ existe et que $\underline{\mathrm{Pic}}^{o}_{X/S}$ soit propre sur S. Nous supposerons de plus pour (3.3), (ii) qu'il existe un ouvert de $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ contenant $\underline{\mathrm{Pic}}^{o}_{X/S}$ qui soit quasi-projectif sur S ; cette condition est vérifiée, on l'a vu, si f est projectif et à fibres géométriques séparables et irréductibles. Rappelons qu'on appelle schéma abélien sur S un schéma en groupes sur S, propre et simple sur S, à fibres géométriques connexes. Nous nous proposons d'examiner s'il existe un sous-schéma en groupes A de $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ qui soit un schéma abélien et dont l'ensemble sous-jacent soit $\underline{\mathrm{Pic}}^{o}_{X/S}$. On vient de voir qu'il en existe toujours si S est le spectre d'un corps. Voici ce qu'on sait dire dans le cas général envisagé ici :

THÉORÈME 3.3. - Sous les conditions précédentes :

(i) S'il existe un sous-schéma abélien de $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ dont l'ensemble sous-jacent soit $\mathrm{Pic}^{o}_{X/S}$, il est unique. Sa formation est par suite compatible avec les changements de base.

(ii) Pour qu'il existe un tel sous-schéma abélien, il suffit qu'il en existe après tout changement de base $S' \to S$, où S' est artinien local ; si S est le spectre d'un anneau local, il suffit même de tester avec les $S' = \mathrm{Spec}(A_n)$, où $A_n = A/m^{n+1}$. Si S est réduit, il suffit également de tester avec les changements de base $S' \to S$, où S' est le spectre d'un anneau de valuation discrète, (complet à corps résiduel algébriquement clos si on y tient).

(iii) Supposons que A existe, et soit $B = \mathrm{Alb}^{o}(X/S)$ le schéma abélien dual, (i. e. $B = \underline{\mathrm{Pic}}^{o}_{A/S}$ [7]). Alors on peut construire canoniquement un espace principal homogène $P = \mathrm{Alb}^{1}(X/S)$ sous B, et un S-morphisme $X \to P$ qui soit universel pour les S-morphismes de X dans des schémas para-abéliens (i. e. des espaces principaux homogènes sous des schémas abéliens). La formation de $\mathrm{Alb}^{o}(X/S)$, $\mathrm{Alb}^{1}(X/S)$ et $X \to \mathrm{Alb}^{1}(X/S)$ commute au changement de base.

Esquissons la démonstration :

(i) est une propriété de rigidité générale pour les sous-schémas abéliens des schémas en groupes commutatifs, si deux tels sous-schémas coïncident ensemblistement en un point $s \in S$, ils coïncident au-dessus de toute la composante connexe de s [7]. (Ce résultat généralise un classique théorème de CHOW.)

(ii) Utilisant les schémas de Hilbert, on voit que le foncteur qui, à tout S' sur S, associe l'ensemble (réduit à 1 ou 0 éléments) des sous-schémas abéliens canoniques de $(\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}) \times_S S'$ est représentable par un schéma de type fini T sur S. En vertu de (i), $T \to S$ est un monomorphisme, et en vertu de (3.2) il est surjectif. Dire qu'il existe un sous-schéma abélien canonique de $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ signifie que T a une section sur S, ou encore que $T \to S$ est un isomorphisme. Ceci équivaut aussi à dire que $T \to S$ est étale, ou, dans le cas où S est réduit, que $T \to S$ est propre. D'où aussitôt (ii).

(iii) Utilisant simplement la définition de $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$, on constate que, pour tout schéma abélien C sur S, la donnée d'un S-morphisme de X dans un espace principal homogène sous C, équivaut à la donnée d'un homomorphisme de groupes $C' \to \underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$, où C' est le schéma abélien dual de C. Or si le sous-schéma abélien canonique A de $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ existe, ces homomorphismes se factorisent nécessairement par A (comme on peut voir encore en utilisant les points d'ordre fini). D'où aussitôt (iii).

Remarques 3.4. - Nous noterons $\underline{\mathrm{Pic}}^{00}_{X/S}$ le sous-schéma abélien canonique de $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$, s'il existe. Ce n'est malheureusement pas toujours le cas, comme on peut voir en faisant varier infinitésimalement la surface de Igusa (par la déformation modulaire du premier ordre). Il est cependant possible que $\underline{\mathrm{Pic}}^{00}_{X/S}$ existe du moins si S est réduit, ou ce qui revient au même d'après (ii), si S est le spectre d'un anneau de valuation discrète. Soient alors X_o, X_1 la fibre spéciale et générique de X, et soit $A_1 = \underline{\mathrm{Pic}}_{X_1/K_1}$, où K est le corps des fractions de l'anneau de valuation V. En vertu de KOIZUMI, il existe un schéma abélien A sur S, essentiellement unique, dont la fibre générale est A_1, et on voit aisément comme dans (2.1), (i) (supposant désormais X simple sur S) que le morphisme identique de A_1 se prolonge en un morphisme

$$A \to \underline{\mathrm{Pic}}_{X/S} \quad .$$

D'où un homomorphisme

$$(*) \qquad A_o \to \underline{\mathrm{Pic}}^{00}_{X_o/k} \quad ,$$

dont on montre facilement que c'est un homomorphisme surjectif à noyau un p-groupe fini, où p est l'exposant caractéristique du corps rédiduel k

(toujours par utilisation des points d'ordre fini). Ceci posé, les conditions suivantes sur X/S sont équivalentes :

a. L'homomorphisme précédent (*) est un isomorphisme (ce que SHIMURA exprimerait en disant que la formation de la "variété de Picard" est "compatible avec spécialisations").

b. $\underline{\mathrm{Pic}}^{oo}_{X/S}$ existe (alors il ne sera autre que A).

c. (Pour mémoire) Les $\underline{\mathrm{Pic}}^{oo}_{X_n/S}$ existent.

D'après la remarque qu'on a faite sur le noyau de (*), la condition (a) est satisfaite si la caractéristique résiduelle est nulle, mais ce résultat sera généralisé notablement (3.5).

Bien entendu, si $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ est simple sur S aux points de $\underline{\mathrm{Pic}}^{o}_{X/S}$, alors ce dernier est ouvert dans $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ (cf. (1.7)) et par suite, muni de la structure induite, c'est un sous-schéma abélien de $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$, donc égal à $\underline{\mathrm{Pic}}^{oo}_{X/S}$ qui existe dans ce cas. Mais on a bien mieux :

THÉORÈME 3.5. - <u>Sous les conditions de (3.3), soit</u> $s \in S$ <u>tel que</u> $\underline{\mathrm{Pic}}_{X_s/k(s)}$ <u>soit simple sur</u> $k(s)$, (<u>ou ce qui revient au même,</u> $\dim \underline{\mathrm{Pic}}_{X_s/k(s)} = \dim H^1(X_s, \mathcal{O}_{X_s})$). <u>Alors il existe un voisinage ouvert</u> U <u>de</u> s <u>tel que</u> $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ <u>soit simple sur</u> S <u>en les points de</u> $\underline{\mathrm{Pic}}^{o}_{X/S}|U$, <u>qui est donc un sous-schéma abélien ouvert dans</u> $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}|U$. <u>A fortiori,</u> $\underline{\mathrm{Pic}}^{oo}_{X|U/U}$ <u>existe.</u>

Indiquons le principe de la démonstration. Ce qui précède nous ramène au cas où S est le spectre d'un anneau artinien local A, et on raisonne par récurrence sur l'ordre infinitésimal de A. On peut donc supposer $\underline{\mathrm{Pic}}^{o}_{X_n/A_n}$ simple sur A_n, et se borner à prouver que $\underline{\mathrm{Pic}}^{o}_{X_{n+1}/A_{n+1}}$ est simple sur A_{n+1}. On constate qu'il suffit pour ceci de construire un schéma abélien P_{n+1} sur A_{n+1} qui prolonge $P_n = \underline{\mathrm{Pic}}^{o}_{X_n/A_n}$, et en même temps un Module inversible $\mathcal{L}_{n+1}$ sur $X_{n+1} \times_{A_{n+1}} P_{n+1}$ qui prolonge le Module inversible $\mathcal{L}_n$ sur $X_n \times_{A_n} P_n$ qui intervient dans la définition du schéma de Picard $\underline{\mathrm{Pic}}_{X_n/A_n}$ comme solution d'un problème universel. (N. B. - Nous pouvons supposer que X est muni d'une section sur S ...) Pour faire la construction, on doit utiliser le résultat-clef suivant : <u>tout schéma abélien défini sur un quotient d'anneau local artinien peut se prolonger</u> (en d'autres termes, le "schéma formel des Modules" absolu ([3], II.) pour un schéma abélien sur un corps algébriquement clos, est simple sur l'anneau des vecteurs de Witt sur k) ; ce résultat lui-même s'obtient en utilisant les propriétés formelles générales de l'obstruction à relever, et les opérations du groupe. Ce résultat admis, on commence par prolonger P_n n'importe comment en P_{n+1}, on rencontre alors une obstruction à relever $\mathcal{L}_n$, obstruction qui se trouve dans un $H^2(X_o \times P_o , \mathcal{O}_{X_o \times P_o}) \otimes_k V$ (où $V = m^{n+1}/m^{n+2}$), et même dans le sous-espace $H^1(X_o , \mathcal{O}_{X_o}) \otimes H^1(P_o , \mathcal{O}_{P_o}) \otimes_k V$ (compte tenu que la restriction de $\mathcal{L}_n$ aux deux facteurs X_n et P_n est triviale). Or ce dernier espace n'est autre que $H^1(P_o , \mathcal{G}_{P_o/k}) \otimes V$, où $\mathcal{G}_{P_o/k}$ est le faisceau tangent à P_o/k, donc c'est aussi l'espace qui exprime l'indétermination qu'il y avait dans le relèvement de P_n à P_{n+1} ([3], II). Par suite, on peut corriger ce relèvement (d'une et d'une seule façon comme il se doit) de façon à tuer l'obstruction à relever $\mathcal{L}_n$.

COROLLAIRE 3.6. - Sous les conditions de (3.5), $R^1 f_*(\mathcal{O}_X)$ est un Module localement libre sur S au voisinage de s, et sa formation commute au changement de base.

Ce Module n'est autre en effet que le Module tangent à $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ le long de la section unité.

Remarque 3.7. - Utilisant le même argument que pour (3.5), on peut montrer que si S' est un sous-schéma de S défini par un Idéal cohérent nilpotent, et si on suppose seulement que $\mathrm{Pic}^o_{X'/S'}$ existe et est à fibres simples, alors $\underline{\mathrm{Pic}}^o_{X/S}$ existe nécessairement et est un schéma abélien sur S. Cela permet de construire des schémas de Picard dans certains cas malgré l'absence d'hypothèse projective ; par exemple le schéma abélien dual d'un schéma abélien sur un anneau artinien existe toujours. D'autre part, utilisant (3.6) dans le cas où X est un schéma abélien sur S, et utilisant la structure connue de $H^*(X_s , \mathcal{O}_{X_s})$ comme algèbre extérieure sur $H^1(X_s , \mathcal{O}_{X_s})$ (ROSENLICHT-SERRE), on trouve que pour tout i, $R^i f_*(\mathcal{O}_X)$ est localement libre, et de façon précise isomorphe à la puissance extérieure i-ième de $R^1 f_*(\mathcal{O}_X)$.

Remarque 3.8. - Dans le cas d'un morphisme projectif simple $f : X \to S$, S réduit et à caractéristiques résiduelles nulles, le résultat (3.6) était connu par voie transcendante, comme conséquence de la théorie de HODGE. En fait, tous les $R^p f_*(\Omega^q_{X/S})$ sont alors localement libres. On a des contre-exemples par contre dans le cas d'inégales caractéristiques pour " $R^1 f_*(\mathcal{O}_X)$ localement libre", à l'aide des variétés de SERRE ([8], p. 50). Il semble qu'on n'ait aucun contre-exemple en égale caractéristique.

COROLLAIRE 3.8. - Sous les conditions de (3.5) $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}|U$ est simple sur U en tous les points de $\underline{\mathrm{Pic}}^{\sigma}_{X/S}|U$.

On applique (2.10), (i). En particulier, tenant compte de (2.10), (iii) :

COROLLAIRE 3.9. - Supposons S à caractéristiques résiduelles nulles. Alors $\underline{\mathrm{Pic}}^{\tau}_{X/S}$ est simple sur S.

Remarque 3.10. - On en déduit par exemple, si $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ est aussi propre sur S, que le groupe de torsion de Néron-Severi des fibres géométriques de f reste constant sur toute composante connexe de S (ce qui est d'ailleurs évident par voie transcendante lorsque f est simple projectif). Signalons que l'utilisation directe de (2.5) permet de montrer, plus généralement, que, si $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ est propre sur S (par exemple $f : X \to S$ simple et projectif) et si q est un nombre premier distinct des caractéristiques résiduelles de S, alors la composante q-primaire des groupes de torsion de Néron-Severi des fibres géométriques de X/S reste constant sur toute composante connexe de S. Il n'en est cependant plus de même en caractéristique $p > 0$ pour la composante p-primaire de la torsion. Il reste cependant possible que le rang sur $k(s)$ de $\underline{\mathrm{Pic}}_{X_s/k(s)}/\underline{\mathrm{Pic}}^{oo}_{X_s/k(s)} = T_{X_s/k(s)}$ reste localement constant ; lorsque S est réduit, on peut montrer qu'il revient au même que $\underline{\mathrm{Pic}}^{oo}_{X/S}$ existe, et que $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ est plat sur S, et il suffit de tester la question pour S spectre d'un anneau de valuation discrète. C'est ce que j'ai vérifié dans les quelques exemples que j'ai regardés ; mais comme l'énoncé correspondant avec S artinien est faux (cf. remarque (2.9) et (3.4)), il ne faut sans doute pas se faire des illusions excessives.

4. Le théorème de finitude pour le schéma de Picard.

Soit $f : X \to S$ un morphisme projectif et plat tel que $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ existe, alors la considération des "polynômes de Hilbert" $Q \in \underset{\sim}{Q}[t]$ permet de décomposer $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ en somme d'ouverts $\underline{\mathrm{Pic}}^{Q}_{X/S}$. Lorsqu'on ne fait pas des hypothèses supplémentaires, assurant par exemple que $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ est séparé sur S, il ne sera pas vrai en général que ces ouverts soient de type fini sur S ; on obtient un contre-exemple lorsque X est "une conique dégénérant en deux droites". Il est possible qu'il en soit cependant ainsi si f est <u>séparable</u> et à <u>fibres géométriques irréductibles</u>. La question est liée à celle de savoir si $\underline{\mathrm{Pic}}^{\tau}_{X/S}$ est de type fini sur S, ce qui est peut-être vrai sans aucune hypothèse sur les fibres de X/S. Lorsque $f : X \to S$ est simple, on note que $\underline{\mathrm{Pic}}^{\tau}_{X/S}$ est contenu dans un des $\underline{\mathrm{Pic}}^{Q}_{X/S}$ (grâce au fait que, sur une variété projective non singulière, l'équivalence "de torsion" est plus fine que (en fait "identique à", d'après MATSUSAKA) l'équivalence numérique pour les diviseurs), donc est de type fini sur S si les $\underline{\mathrm{Pic}}^{Q}_{X/S}$ le sont. Noter que les questions de finitude qu'on vient de soulever gardent un sens évident sans supposer même l'existence de $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$, car elles s'exprimant en disant que certaines familles de Modules inversibles sont "limitées" au sens de [3], IV : Considérons, pour tout corps algébriquement clos k, les sous-schémas intègres de $\underset{\sim}{P}^{r}_{k}$, de dimension n et de degré d, et les Modules inversibles sur de tels préschémas, ayant un polynôme de Hilbert Q (où r, n, d, Q sont donnés), montrer que la famille de ces Modules (considérés comme des Modules cohérents sur les $\underset{\sim}{P}^{r}_{k}$) est <u>limitée</u>, i. e. peut se paramétrer par un schéma de type fini sur $\underset{\sim}{Z}$.

Utilisant la méthode de MATSUSAKA [6], une démonstration assez technique (faisant appel aux "critères d'équivalence" sous une forme convenable) permet de répondre par l'affirmative lorsque on se borne aux sous-variétés non singulières de $\underset{\sim}{P}^{r}_{k}$. De façon plus précise, on obtient le résultat suivant :

THÉORÈME 4.1. - Soient : $X \to S$ un morphisme simple projectif à fibres géométriques connexes, avec S noethérien, $\mathcal{O}_X(1)$ un Module très ample sur X relatif à S, E une partie de $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$, correspondant à une famille $(\mathcal{L}_i)$ de Modules inversibles sur les fibres géométriques $\overline{X}_{s_i}$ de X/S, D_i un diviseur (pas nécessairement positif) sur $\overline{X}_{s_i}$ définissant $\mathcal{L}_i$, $a_n^{(i)} t^n + \dots + a_o^{(i)}$ le polynôme de Hilbert de $\mathcal{L}_i$, $\xi = \xi_i$ un diviseur définissant $\mathcal{O}_X(1)$, i. e. une section hyperplane. Les conditions sont équivalentes :

a. Q est quasi-compact, i. e. contenu dans un ouvert de type fini sur S, i. e. la famille des $(\mathcal{L}_i)$ est limitée.

b. E est contenu dans la réunion d'un nombre fini des ensembles $\underline{\mathrm{Pic}}^{Q}_{X/S}$, $Q \in \underset{\sim}{Q}[t]$, i. e. l'ensemble des polynômes de Hilbert des $\mathcal{L}_i$ est fini.

b'. (Si les fibres de X/S ont toutes même dimension n). Les deux coefficients $a_{n-1}^{(i)}$ et $a_{n-2}^{(i)}$ des polynômes de Hilbert des $\mathcal{L}_i$ restent dans un ensemble fini.

b". (Si les fibres de X/S ont toutes même dimension n). Les entiers $\xi^{n-1} D_i$ et $\xi^{n-2} D_i^2$ (degrés projectifs de D_i et de D_i^2) restent majorés.

COROLLAIRE 4.2. - Soit $f : X \to S$ un morphisme simple projectif à fibres géométriques connexes, alors les schémas $\underline{\mathrm{Pic}}^Q_{X/S}$ et $\underline{\mathrm{Pic}}^\tau_{X/S}$ $(Q \in \underset{\sim}{Q}[t])$ sont projectifs sur S .

Comme ils sont de type fini sur S d'après (4.1), on peut appliquer (2.4).

BIBLIOGRAPHIE

[1] CHEVALLEY (Claude). - Sur la théorie de Picard, Amer. J. of Math., t. 82, 1960, p. 435-490.

[2] GROTHENDIECK (A.) et DIEUDONNÉ (J.). - Eléments de géométrie algébrique, Chap. 1 et suivante., - Paris, Presses universitaires de France, 1960-1961 Institut des hautes Études scientifiques, 4, 8, 11, ...).

[3] GROTHENDIECK (Alexander). - Technique de descente et théorèmes d'existence en géométrie algébrique, I-V., Séminaire Bourbaki, t. 12, 1959/60, n° 190, 29 p. et n° 195, 22 p. ; t. 13, 1960/61, n° 212, 20 p. et n° 221, 28 p. ; t. 14, 1961/62, n° 232, 19 p.

[4] GROTHENDIECK (Alexander). - Séminaire de géométrie algébrique, 1960/61. - Paris, Institut des hautes Études scientifiques, 1961.

[5] GROTHENDIECK (Alexander). - Séminaire de géométrie algébrique, 1961/62, rédigé par un groupe d'auditeurs. - Paris, Institut des hautes Études scientifiques (à paraître).

[6] MATSUSAKA (T.). - The criteria for algebraic equivalence and the torsion group, Amer. J. Math., t. 79, 1957, p. 53-66.

[7] MUMFORD (D.) and TATE (J.). - Séminaire de géométrie algébrique, Harvard University, Spring Term 1962 (à paraître).

[8] SERRE (Jean-Pierre). - Sur la topologie des variétés algébriques en caractéristique p , Symposium internacional de topologia algebraica [1956. Mexico] ; p. 24-53. - Mexico, Universidad nacional autonoma, 1958.